

**Universidad Politécnica de Cartagena**  
**Departamento de Matemática Aplicada y Estadística**

**Problemas de Álgebra**  
**Aplicaciones Lineales**

1. Dadas las siguientes aplicaciones entre los  $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales que se indican, razonar si son o no son aplicaciones lineales:

i)  $f_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \mid f_1(x, y, z) = (2x + y, y - 3x, 0)$ .

ii)  $f_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \mid f_2(x, y, z) = (2x + y, y - 3x, 8)$ .

iii)  $f_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_3(x, y, z) = 2x + y - 5z$ .

iv)  $f_4 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_4(x, y, z) = x^2 + y - 5z$ .

v)  $f_5 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \mid f_5(x, y) = (x, -2y, x + y)$ .

vi)  $f_6 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \mid f_6(x, y) = (x, y - 2, 0)$ .

vii)  $f_7 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_7(x, y) = |x + y|$ .

viii)  $f_8 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_8(x, y) = (x + y)^2$ .

ix)  $f_9 : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x] \mid f_9(p(x)) = p'(x)$ .

x)  $f_{10} : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x] \mid f_{10}(p(x)) = x \cdot p'(x)$ .

2. Sean  $V, W$   $K$ -espacios vectoriales y  $f : V \longrightarrow W$  una aplicación lineal. Demostrar:

i) Si  $S = \langle v_1, v_2, \dots, v_r \rangle \subseteq V$  entonces  $f(S) = \langle f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_r) \rangle$ .

ii) Si  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  es base de  $V$  entonces  $\{f(b_1), \dots, f(b_n)\}$  es sistema generador de  $\text{Im}f$ .

iii) Si  $f$  es suprayectiva entonces  $\dim W \leq \dim V$ .

3. ¿ Existe una aplicación lineal  $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f(1, 0, 0) = (1, 1)$ ,  $f(0, 1, 0) = (2, -3)$ ,  $f(0, 0, 1) = (-1, 2)$  y  $f(1, 0, 1) = (-1, 1)$ ? ¿ Y si fuera  $f(1, 0, 1) = (0, 3)$ ?

4. Para las aplicaciones lineales del ejercicio 1 obtener la matriz asociada en las bases canónicas, el núcleo, la imagen y clasificarlas (obtener si son o no inyectivas, suprayectivas o biyectivas).

5. Sean  $V, W$   $K$ -espacios vectoriales y  $f : V \longrightarrow W$  aplicación lineal. Demostrar que  $\dim V = \dim \text{Ker} f + \dim \text{Im} f$ .

6. i) Demostrar que los siguientes conjuntos son base de  $\mathbb{R}^3$ :

$$B_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}, B_2 = \{(1, -1, 0), (1, 0, -1), (-1, 1, 1)\},$$

$$B_3 = \{(1, 1, -1), (0, -1, 1), (-1, 0, 1)\}.$$

ii) Encontrar las matrices de cambio de base en cada uno de los siguientes casos y utilizar éstas para obtener a partir de las coordenadas en la primera base de  $v = (-1, 2, 1)$ , las coordenadas de éste en la segunda:

a) De  $B_1$  a  $B_2$ . b) De  $B_2$  a  $B_1$ . c) De  $B_1$  a  $B_3$ . d) De  $B_3$  a  $B_1$ . e) De  $B_2$  a  $B_3$ .

f) De  $B_3$  a  $B_2$ .

7. En los siguientes casos, obtener la matriz de  $f$  en las bases canónicas respectivas y  $M_{B, B'}(f)$ :

i)  $f_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid f_1(x, y, z) = (x + 2z, 2x + y + z)$ ,  $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ ,  $B' = \{(1, 1), (1, 0)\}$ .

ii)  $f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \mid f_2(x, y) = (2x + y, 2x + y, x + 2y)$ ,  $B = \{(1, 1), (1, -1)\}$ ,  $B' = \{(1, 1, 1), (0, 2, 0), (0, -1, 1)\}$ .

iii)  $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid f_3(x) = (x, 3x)$ ,  $B = \{2\}$ ,  $B' = \{(1, 1), (0, 1)\}$ .

iv)  $f_4 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R} \mid f_4(x, y, z, t) = x - y + z$ ,  $B = \{(1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 1)\}$ ,  $B' = \{-2\}$ .

v)  $f_5 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = (0, 0)$ ,  $B = B' = \{(1, 1), (2, 1)\}$ .

8. Sea  $B = \{u_1, u_2, u_3\}$  una base de  $\mathbb{R}^3$  y  $f$  un endomorfismo de  $\mathbb{R}^3$  tal que  $f(u_1) = -u_1$ ,  $f(u_2) = u_1 + 2u_2 + 2u_3$ ,  $f(u_3) = -u_2 - u_3$ . Supongamos que la matriz de cambio de base de  $B$  a la base canónica es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcular:

i)  $M_B(f)$ ,  $\text{Ker} f$  e  $\text{Im} f$ .

ii)  $f^{-1}(S)$  donde  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0, y - z = 0\}$ .

9. Determinar un endomorfismo  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  que verifique que  $\text{Ker } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$  y  $f(0, 1, 1) = (2, 1, -1)$ .

10. Determinar un endomorfismo  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  que verifique que  $\text{Ker } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0, x + z = 0\}$  e  $\text{Im } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ .

11. Consideremos la base de  $\mathbb{R}^3$   $B = \{(1, -1, 0), (0, 1, -1), (1, 0, 1)\}$  y la base de  $\mathbb{R}^2$   $\tilde{B} = \{(-1, 1), (-1, 0)\}$ . Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una aplicación lineal tal que

$$M_{B, \tilde{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calcular:

i) La matriz de la aplicación  $f$  respecto de las bases canónicas respectivas.

ii) La expresión analítica de dicha aplicación.

iii) El núcleo y la imagen de  $f$  y bases de estos subespacios.

iv) Clasifica  $f$ .

12. Consideremos la base de  $\mathbb{R}^2$   $B = \{(1, -1), (0, 1)\}$  y la base de  $\mathbb{R}^3$   $\tilde{B} = \{(-1, -1, 0), (-1, 0, 1), (2, 0, 0)\}$ . Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una aplicación lineal tal que

$$M_{B, \tilde{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcular:

i) La matriz de la aplicación  $f$  respecto de las bases canónicas respectivas.

ii) La expresión analítica de dicha aplicación.

iii) El núcleo y la imagen de  $f$  y bases de estos subespacios.

iv) Clasifica  $f$ .

13. Consideremos la base de  $\mathbb{R}^2$   $B = \{(1, -1), (0, 1)\}$  y la base de  $\mathbb{R}$   $\tilde{B} = \{2\}$ . Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una aplicación lineal tal que

$$M_{B, \tilde{B}}(f) = (1 \quad -1).$$

Calcular:

- i) La matriz de la aplicación  $f$  respecto de la bases canónicas respectivas.
- ii) La expresión analítica de dicha aplicación.
- iii) El núcleo y la imagen de  $f$  y bases de estos subespacios.
- iv) Clasifica  $f$ .

14. Consideremos la base de  $\mathbb{R}^3$   $B = \{(1, -1, 1), (0, 1, -1), (1, 0, -1)\}$ . Sea  $f$  un endomorfismo de  $\mathbb{R}^3$  tal que

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calcular:

- i) La matriz de la aplicación  $f$  respecto de la base canónica.
- ii) La expresión analítica de dicha aplicación.
- iii) El núcleo y la imagen de  $f$  y bases de estos subespacios.
- iv) Clasifica  $f$ .

15. Consideremos la base de  $\mathbb{R}^2$   $B = \{(1, -1), (1, 1)\}$ . Sea  $f$  un endomorfismo de  $\mathbb{R}^2$  tal que

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcular:

- i) La matriz de la aplicación  $f$  respecto de la base canónica.
- ii) La expresión analítica de dicha aplicación.
- iii) El núcleo y la imagen de  $f$  y bases de estos subespacios.
- iv) Clasifica  $f$ .

### Problemas de exámenes

16. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & a+3 & 4 \\ 1 & a+2 & a+2 \end{pmatrix}$$

la matriz asociada al endomorfismo  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  en la base canónica.

- a) Determinar razonadamente los valores de  $a$  para los cuales  $f^{-1}$  es aplicación (valores de  $a$  para los cuales  $A$  es invertible). ¿Cuál sería la matriz asociada a  $f^{-1}$  respecto de la base canónica? Obtenerla para el caso de que  $a = -2$ .
- b) Para  $a = -1$ , calcula  $\text{Ker} f$ ,  $\text{Im} f$ , dando ecuaciones bases y dimensiones de éstos.
- c) Discutir según los valores de  $a$  y  $b$  si existe  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  tales que  $f(x, y, z) = (1, 2b, b)$ .

17. En  $\mathbb{R}^3$  se considera la base  $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$  donde  $u_1 = (1, 0, 0)$ ,  $u_2 = (1, 1, 0)$ ,  $u_3 = (1, 1, 1)$  y sea  $B = \{e_1, e_2, e_3\}$  la base canónica.

- a) Obtener las matrices de cambio de base de  $B$  a  $B'$  y de  $B'$  a  $B$ .
- b) Sea  $f$  un endomorfismo de  $\mathbb{R}^3$  dado por:  $f(u_1) = u_1 + u_2$ ;  $f(u_2) = u_1 + u_3$ ;  $f(u_3) = u_2 - u_3$ .

-Hallar la matriz de dicho endomorfismo referida a la base  $B'$ .

-Hallar la matriz de dicho endomorfismo referida a la base canónica  $B$ .

-¿ Existe alguna relación entre ellas? En caso afirmativo explicar dicha relación.

- c) Si  $v = e_1 + 2e_2 - e_3$ , hallar su imagen y expresarla en ambas bases.

18. En el espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$  se considera la base  $B = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 1, -1)\}$  y sea  $f$  un endomorfismo de  $\mathbb{R}^3$  tal que:

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & x \end{pmatrix}$$

- i) Calcula  $x$  para el cual  $f$  no es suprayectiva.

Para dicho valor de  $x$ .

- ii) Calcula la expresión analítica de  $f$  y su matriz respecto de la base canónica.
- iii) Calcula bases del núcleo y de la imagen de  $f$  ¿Es  $f$  inyectiva?
- iv) Calcula las coordenadas de  $f(1, 1, 1)$  respecto de la base  $B$ .