Universidad Politécnica de Cartagena

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Problemas de Álgebra

Matrices, Determinantes y Sistemas de Ecuaciones Lineales

1. Determinar dos matrices $X, Y \in \mathrm{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ tales que:

$$\begin{cases} 2X - 3Y = A \\ \quad X - Y = B \end{cases}$$

donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Dadas las matrices:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$,

$F = \begin{pmatrix} 2/5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $H = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

i) Indicar todos los pares formados por matrices anteriores tales que se puede realizar el producto de la primera con la segunda. Obtener dichos productos.

ii) Descomponer la matriz A en suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica.

3. Sean $A, B, C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Razonar si es cierto o falso que:

i) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

ii) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

iii) Si A y B son matrices no nulas entonces AB es no nula.

iv) Si A es no nula y $AB = AC$ entonces $B = C$.

4. Comprobar que para todo número natural n se verifica:

i) Si $a \in \mathbb{R}$ entonces $\begin{pmatrix} \cos a & -\operatorname{sen} a \\ \operatorname{sen} a & \cos a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos na & -\operatorname{sen} na \\ \operatorname{sen} na & \cos na \end{pmatrix}$.

ii) Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ entonces $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_m \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_m^n \end{pmatrix}$.

iii) Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$.

5. Sean $A, B \in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$ y $\lambda \in K$. Razonar si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:
$(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$; $(\lambda A)^{\mathrm{T}} = \lambda A^{\mathrm{T}}$; $(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$; $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$ siendo en este apartado $A \in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$ y $B \in \mathrm{M}_{m\times r}(K)$.

6. Calcula el rango de las siguientes matrices reales:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -4 & 6 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Discute según los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ el rango de las siguientes matrices reales:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 6 & a \\ 2 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & a & -4 \\ -3 & 3 & b \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}.$$

8. Calcula por el método de Gauss-Jordan (transformaciones elementales), si existe, la matriz inversa de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}; (2).$$

9. Calcula los determinantes de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

10. Calcula haciendo ceros debajo de la diagonal los determinantes de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -4 & 1 \\ -3 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

11. Calcula por determinantes, si existe, la matriz inversa de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

12. Discute según los valores de $a \in \mathbb{R}$ el rango de las siguientes matrices y cuando sea posible, sus matrices inversas:

$$(\, a \,);\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & 4 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

13. Sean $A, B, C, D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Razonar si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones, siendo C y D matrices regulares:

i) El determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de su diagonal.

ii) $|A + B| = |A| + |B|$.

iii) C^{T} es regular y $(C^{\mathrm{T}})^{-1} = (C^{-1})^{\mathrm{T}}$.

iv) $(C^{-1})^{-1} = C$; $|C^{-1}| = |C|^{-1}$; $(\lambda C)^{-1} = \lambda^{-1}(C^{-1})$.

v) $(CD)^{-1} = D^{-1}C^{-1}$.

14. Sea $C \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ con $|C| = 10$ y $E = 5C$. Obtener razonadamente $|E|$ y la relación que existe entre C^{-1} y E^{-1}.

15. Comprueba el valor del determinante de Vandermonde de orden 4:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}.$$

16. Para cada una de las siguientes matrices, si $a, b \in \mathbb{R}$, calcula sus determinantes y los valores de a y b para que sean invertibles.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & b & a & a \\ 1 & a & b & a \\ 1 & a & a & b \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a+b & a & a & a \\ a & a+b & a & a \\ a & a & a+b & a \\ a & a & a & a+b \end{pmatrix}.$$

17. Utilizando el método de Gauss, resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} -2x + 3y - 5z = -4 \\ 3x + 2y - z = 4 \\ -x + y - z = -1 \end{cases}; \begin{cases} 2x - 2y + 5z = 5 \\ x + 2y - 6z = -1 \\ 3x - z = 2 \end{cases}; \begin{cases} 3x - 2y + 6z = 3 \\ -x + 3y + 7z = 1 \\ -4x - 5y + z = 3 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x - 2y + 3z + 2u = 2 \\ -2x + 3y - 4z + 5u = -11 \\ 5x - 8y + 11z - 8u = 24 \\ 4x - 6y + 8z - 10u = 22 \end{cases}; \begin{cases} x - y = 3 \\ z - 2y = 4 \end{cases}.$$

18. Utilizando el método de Gauss, discute y resuelve según los valores de los parámetros los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax+by+z=1 \\ x+aby+z=b \\ x+by+az=1 \end{cases} ; \begin{cases} x-y+z=b \\ x+ay+z=b \\ 2x+2ay+(a+1)z=b \end{cases} ; \begin{cases} x-y-z=1 \\ x+by+z=1 \\ x-y+az=b \end{cases} .$$

19. Dado un sistema de n ecuaciones con m incognitas $Ax = b$ con coeficientes en el cuerpo K razonar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

i) Si $n > m$ entonces el sistema es incompatible.

ii) Si el sistema admite la solución trivial $x = 0_m$ entonces es homogéneo.

iii) Si el sistema es compatible determinado entonces $m = n$.

iv) Si los sistemas $Ax = b_1$ y $Ax = b_2$ son compatibles, entonces el sistema $Ax = b$ con $b = \lambda b_1 + \mu b_2$, $\lambda, \mu \in K$ es compatible.

v) Si $Ax = b$ es un sistema incompatible de 5 ecuaciones con 4 incognitas y $\mathrm{rg}(A) = 3$ entonces $\mathrm{rg}(A|b) = 4$.

20. i) Discute el siguiente sistema según los valores de $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 2x-y+az=1 \\ 4x-ay-z=0 \\ -2x+y-z=b \end{cases} .$$

ii) Para $a = 0$, comprobar que existe la inversa de la matriz de los coeficientes del sistema anterior y mediante dicha matriz calcular la solución del sistema.

21. i) Discute el siguiente sistema según los valores de $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} ax+2y+z=4 \\ 2x-3y+az=0 \\ 3x-y+2z=b \end{cases} .$$

ii) Para $a = 2$, comprobar que existe la inversa de la matriz de los coeficientes del sistema anterior y mediante dicha matriz calcular la solución del sistema.