Interpolación de Lagrange

Recordemos que el polinomio de Taylor de grado n de una función $f(x)$ en un punto a es aquel que cumple que en a las derivadas hasta grado n de $f(x)$ y de $p(x)$ coinciden. Además, éste polinomio permite hacer aproximaciones de f cerca de a.

Ahora nos planteamos también buscar un polinomio que aproxime a una función pero partiendo de una idea diferente.
Sea $f(x)$ una función, $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{Dom} f$ y supongamos que $f(x_0) = f_0$, $f(x_1) = f_1$, …, $f(x_n) = f_n$. Entonces existe un polinomio $p(x)$ de grado n que cumple que $p(x_0) = f_0$, $p(x_1) = f_1$, …, $p(x_n) = f_n$ y además, éste es el único polinomio de grado n que lo cumple.
Se puede demostrar que si

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}$$

$1 \leq i \leq n$, entonces $p(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + \ldots + f_n L_n(x)$.

Error en la Interpolación de Lagrange

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ distintos.

Supongamos que f es $n + 1$ veces derivable en $]a, b[$. Sea $p(x)$ el polinomio interpolador de f.

Entonces, para todo $x \in]a, b[$ existe

$\xi(x) \in]\min(x, x_0, x_1, \ldots, x_n), \max(x, x_0, x_1, \ldots, x_n)[$ tal que

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1}) \cdot (x - x_n).$$

Integración numérica. Regla de Simpson

Supongamos que $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f \in \mathcal{C}^4([a, b])$. Entonces si $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h = b$ siendo $h = \frac{b-a}{2}$ existe $\xi \in]a, b[$ tal que $\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) - \frac{h^5}{90} f^{(iv)}(\xi)$

Así, la cota del error cometido es $|\frac{h^5}{90} f^{(iv)}(\xi)|$.