4. Sucesiones y funciones

Mathematica dispone de herramientas para hacer sumas de series numéricas, derivadas de funciones de una y varias variables, cálculo de primitivas de funciones de una variable, desarrollos de Taylor de funciones de una variable, resolución numérica de ecuaciones, representaciones gráficas de funciones de una y dos variables, así como curvas en el espacio etcétera. Vamos a ver como hacer todas estas cosas con Mathematica.

4.1 Cálculo de sumas y series numéricas

Supongamos que queremos sumar números que vienen dados por una cierta función, como por ejemplo calcular la suma $\sum_{i=1}^{10} i^2$, o incluso calcular la suma de una serie numérica como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Mathematica dispone de un comando que realiza esta tarea con poco coste de tiempo. Este comando es

$$\mathrm{Sum}[fórmula].$$

Para sumar $\sum_{i=1}^{10} i^2$ escribimos

$$\begin{aligned} \mathrm{In}[45] &:= \mathrm{Sum}[i\hat{}2, \{i, 1, 10\}] \\ \mathrm{Out}[45] &= 385 \end{aligned}$$

También se pueden hacer las sumas n–ésimas operando de forma simbólica. Así para calcular $\sum_{i=1}^{n} i^2$ procedemos del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \mathrm{In}[46] &:= \mathrm{Sum}[i\hat{}2, \{i, 1, n\}] \\ \mathrm{Out}[46] &= \frac{1}{6} n\,(1+n)\,(1+2n)\,. \end{aligned}$$

Para calcular la suma de una serie numérica, por ejemplo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ escribimos

$$\begin{aligned} \mathrm{In}[47] &:= \mathrm{Sum}[i\hat{}-2, \{i, 1, \mathrm{Infinity}\}] \\ \mathrm{Out}[47] &= \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

4.2 Cálculo de límites

Mathematica tiene también una sentencia para calcular límites de funciones de la forma $\lim_{x\to x_0} f(x)$. Este comando es

$$\mathrm{Limit}[f[x], x- > x_0].$$

Por ejemplo, si queremos calcular $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$, debemos escribir.

$$\begin{aligned} \mathrm{In}[48] &:= \mathrm{Limit}[\mathrm{Sin}[x]/x, x- > 0] \\ \mathrm{Out}[48] &= 1. \end{aligned}$$

También es posible calcular límites cuando x tiende a $+\infty$ ó $-\infty$, como por ejemplo $\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x+2}$. Para ello hemos de escribir

$$\begin{aligned} \mathrm{In}[49] &:= \mathrm{Limit}[(x+1)/(x+2), x- > \mathrm{Infinity}] \\ \mathrm{Out}[49] &= 1. \end{aligned}$$

4.3 Derivadas de funciones

Supongamos que tenemos una función de una variable $f(x)$ o de varias variables $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ a la que queremos calcular su derivada o derivada parcial respecto de alguna de sus variables. El comando que realiza ese cálculo con Mathematica es

$$\mathrm{D}[f, x] \text{ ó } \mathrm{D}[f, x_i].$$

Por ejemplo si queremos calcular la derivada de $f(x) = \sin x$ escribiremos

$$\begin{aligned} \mathrm{In}[50] &:= \mathrm{D}[\mathrm{Sin}[x], x] \\ \mathrm{Out}[50] &= \mathrm{Cos}[x], \end{aligned}$$

especificando tanto la función como la variable respecto de la cual vamos a derivar. Para calcular la derivada parcial con respecto a la variable y de la función $f(x, y) = \sin(x + y)$ debemos escribir

$$\begin{aligned} \mathrm{In}[51] &:= \mathrm{D}[\mathrm{Sin}[x+y], y] \\ \mathrm{Out}[51] &= \mathrm{Cos}[x+y]. \end{aligned}$$

Para calcular la derivada n–ésima de $f(x)$, hemos de proceder con el comando

$$\mathrm{D}[f, \{x, n\}].$$

Así la segunda derivada de $f(x) = \sin x$ se calcula tecleando

$$\begin{aligned}\text{In}[52] &:= \text{D}[\text{Sin}[x], \{x, 2\}] \\ \text{Out}[52] &= -\text{Sin}[x]\end{aligned}$$

y $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$ de la función $f(x, y) = \sin(x + y)$ sería

$$\begin{aligned}\text{In}[53] &:= \text{D}[\text{Sin}[x + y], \{y, 3\}] \\ \text{Out}[53] &= -\text{Cos}[x + y].\end{aligned}$$

Si ahora queremos calcular derivadas parciales de funciones respecto de diferentes variables hemos de indicarlo del modo siguiente

$$\text{D}[f, x_1, x_2, ..., x_n].$$

Así por ejemplo $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ de la función $f(x, y) = \sin(x+y)$ se calcula escribiendo

$$\begin{aligned}\text{In}[54] &:= \text{D}[\text{Sin}[x + y], x, y] \\ \text{Out}[54] &= -\text{Sin}[x + y].\end{aligned}$$

Para calcular la diferencial de una función tenemos el comando

$$\text{Dt}[f].$$

Así para calcular la diferencial de la función anterior se escribe

$$\begin{aligned}\text{In}[55] &:= \text{Dt}[\text{Sin}[x + y]] \\ \text{Out}[55] &= \text{Cos}[x + y](\text{Dt}[x] + \text{Dt}[y]).\end{aligned}$$

4.4 Cálculo de primitivas e integrales definidas

Mathematica también posee sentencias para calcular primitivas de funciones de una variable. El comando que se utiliza para calcular la primitiva de una función $f(x)$ es

$$\text{Integrate}[f, x],$$

indicando tanto la función a integrar como la variable respecto de la que se integra. Por ejemplo, para calcular una primitiva de $f(x) = \sin x$ procedemos del siguiente modo.

$$\begin{aligned}\text{In}[56] &:= \text{Integrate}[\text{Sin}[x], x] \\ \text{Out}[56] &= -\text{Cos}[x].\end{aligned}$$

Si lo que pretendemos es calcular la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, el comando que debemos usar es

$$\text{Integrate}[f, \{x, a, b\}],$$

indicando ahora además los límites de integración. Así $\int_0^1 xdx$ se calcularía escribiendo

$$\begin{aligned} \text{In}[57] &:= \text{Integrate}[x, \{x, 0, 1\}] \\ \text{Out}[57] &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Si en el ejemplo anterior hubiésemos querido obtener un valor numérico en términos de cifras decimales, hubiéramos debido utilizar el comando

$$\text{NIntegrate}[f, \{x, a, b\}]$$

para obtener:

$$\begin{aligned} \text{In}[58] &:= \text{NIntegrate}[x, \{x, 0, 1\}] \\ \text{Out}[58] &= 0.50000, \end{aligned}$$

o bien utilizando el comando N[$\cdot$], es decir, escribiendo

$$\begin{aligned} \text{In}[59] &:= \text{N}[\%57] \\ \text{Out}[59] &= 0.50000. \end{aligned}$$

4.5 Resolución numérica de ecuaciones

Mathematica dispone de sentencias para obtener soluciones exactas y aproximadas de algunas ecuaciones y sistemas algebraicos no necesariamente lineales. Para ello hemos de distinguir entre ecuaciones y sistemas polinómicos y no polinómicos.

En primer lugar hemos de aprender a escribir ecuaciones con el programa. Supongamos que tenemos una ecuación dada por dos funciones f, g del modo $f(x) = g(x)$. Para escribir esta ecuación con Mathematica hemos de poner dos símbolos de igualdad entre ambas funciones, y escribir éstas de forma que el programa lo entienda. Es decir, debemos escribir

$$f[x] == g[x].$$

Si lo que queremos es resolver una ecuación polinómica, es decir, con f y g polinomios, tenemos a nuestra disposición los comandos

$$\mathrm{Solve}[p[x] == g[x], x]$$

y

$$\mathrm{NSolve}[p[x] == g[x], x].$$

El primero de ellos nos resolverá la ecuación encontrando las soluciones exactas en caso de existir. El segundo nos proporcionará las soluciones aproximadas. Así para calcular las soluciones de la ecuación $x^2 + 2x - 7 = 0$ escribiremos

$$\begin{aligned} \mathrm{In}[70] &:= \mathrm{Solve}[x\hat{\ }2 + 2\,x - 7 == 0, x] \\ \mathrm{Out}[70] &= \{\{x- > -1 - 2\sqrt{2}\}, \{x- > -1 + 2\sqrt{2}\}\} \end{aligned}$$

para el cálculo de las soluciones exactas y

$$\begin{aligned} \mathrm{In}[71] &:= \mathrm{NSolve}[x\hat{\ }2 + 2\,x - 7 == 0, x] \\ \mathrm{Out}[71] &= \{\{x- > -3.82843\}, \{x- > 1.82843\}\} \end{aligned}$$

para las aproximadas.

Con estos comandos podemos resolver también sistemas de ecuaciones polinómicas. Para ello basta con añadir diferentes ecuaciones entre llaves separándolas con una coma, e indicar todas las variables incógnita también entre llaves. Por ejemplo el sistema

$$\begin{cases} x^2 = -y \\ y^2 = x \end{cases}$$

puede resolverse escribiendo

$$\begin{aligned} \mathrm{In}[72] &: = \mathrm{Solve}[\{x\hat{\ }2 == -y, y\hat{\ }2 == x\}, \{x, y\}] \\ \mathrm{Out}[72] &= \{\{x- > 0, y- > 0\}, \{x- > 1, y- > -1\}, \\ \{x- &> -(-1)^{1/3}, y- > -(-1)^{2/3}\}, \{x- > (-1)^{2/3}, y- > (-1)^{1/3}\}\} \end{aligned}$$

para el valor exacto y

$$\begin{aligned} \mathrm{In}[73] &:= \mathrm{NSolve}[\{x\hat{\ }2 == -y, y\hat{\ }2 == x\}, \{x, y\}] \\ \mathrm{Out}[73] &= \{\{x- > -0.5 - 0.866025I, y- > 0.5 - 0.866025I\}, \\ \{x- &> -0.5 + 0.866025I, y- > 0.5 + 0.866025I\}, \{x- > 0., y- > 0.\}, \\ \{x- &> 1., y- > -1.\}\} \end{aligned}$$

para el valor aproximado.

Si ahora queremos resolver ecuaciones no necesariamente polinómicas, es decir ecuaciones de la forma $f(x) = g(x)$ donde f ó g no son polinomios, disponemos del comando

$$\text{FindRoot}[f[x] == g[x], \{x, x_0\}].$$

Este comando genera una sucesión numérica a partir de un valor inicial x_0 utilizando el método de Newton. El punto x_0 es entonces un número en el cual vamos a empezar a hacer iteraciones de dicho método. Así para calcular una solución de la ecuación $e^{-x} = x$ escribimos

$$\begin{aligned} \text{In}[74] &:= \text{FindRoot}[\text{Exp}[-x] == x, \{x, 0.5\}\} \\ \text{Out}[74] &= \{x- > 0.567143\}, \end{aligned}$$

donde 0.5 es un valor numérico que habremos obtenido previamente.

Con este comando también se pueden resolver sistemas de ecuaciones. Para ello basta con añadir ecuaciones entre llaves separándolas con comas, e introducir puntos de inicio para hacer las iteraciones en todas las variables incógnita. Por ejemplo el sistema

$$\begin{cases} e^{-x} = y \\ e^{-y} = x^2 \end{cases}$$

puede resolverse del siguiente modo

$$\begin{aligned} \text{In}[75] &:= \text{FindRoot}[\{\text{Exp[-}x\text{]} == y, \text{Exp[-}y\text{]} == x\hat{\ }2\}, \{x, 0.5\}, \{y, 0.5\}] \\ \text{Out}[75] &= \{x- > 0.798518, y- > 0.449995\}. \end{aligned}$$

4.6 Polinomio de Taylor

Mathematica incorpora sentencias para obtener polinomios de Taylor de funciones reales. Si tenemos una función f de la cual queremos obtener su desarrollo de Taylor de grado n en el punto x_0 escribiremos

$$\text{Series}[f[x], \{x, x_0, n\}],$$

indicando la función y la variable respecto de la cual hacemos el desarrollo. Así, para calcular el desarrollo de Taylor de grado 5 en el punto 0 de la función e^x escribimos

$$\begin{aligned} \text{In}[76] &:= \text{Series}[\text{Exp}[x], \{x, 0, 5\}] \\ \text{Out}[76] &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + 0[x]^6. \end{aligned}$$

Para escribir solamente el polinomio de Taylor añadimos a la expresión anterior la sentencia

$$\text{Normal}[\text{expresión}].$$

Así

$$\begin{aligned} \text{In}[76] &:= \text{Normal}[\text{Series}[\text{Exp}[x], \{x, 0, 5\}]] \\ \text{Out}[76] &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} \end{aligned}$$

escribe únicamente el polinomio obtenido anteriormente.

4.7 Representación gráfica de funciones, curvas y superficies

Mathematica permite hacer representaciones gráficas de funciones de una y varias variables. Para ello hemos de darle tanto la función, como el dominio de definición de ésta.

Para la representación gráfica de funciones reales de variable real, tenemos el comando

$$\text{Plot}[f[x], \{x, x_0, x_1\}],$$

donde indicamos la función, la variable de la función, y un intervalo $[x_0, x_1]$ donde hacer la representación. Así, para representar la función $f(x) = \sin x$ en el dominio $[0, 2\pi]$ escribimos

$$\text{In}[77] := \text{Plot}[\text{Sin}[x], \{x, 0, 2Pi\}].$$

Para representar varias funciones a la vez hemos de escribir todas las funciones que deseemos representar entre llaves y separadas por comas, es decir

$$\text{Plot}[\{f_1[x], f_2[x], ..., f_n[x]\}, \{x, x_0, x_1\}].$$

Si escribimos entonces

$$\text{In}[78] := \text{Plot}[\{\text{Sin}[x], \text{Sin}[2x]\}, \{x, 0, 2Pi\}]$$

generaremos una representación gráfica simultánea de las funciones $\sin x$ y $\sin 2x$.

La representación gráfica de funciones de dos variables se hace mediante el comando

$$\text{Plot3D}[f[x, y], \{x, x_0, x_1\}, \{y, y_0, y_1\}]$$

que nos hará una representación gráfica de $f(x, y)$ en el cuadrado $[x_0, x_1] \times [y_0, y_1]$. Por ejemplo, si queremos representar la función $f(x, y) = \sin(xy)$ en

Figure 0.1:

el dominio $[0,3] \times [0,3]$ hemos de escribir

$$\text{In}[79] := \text{Plot3D}[\text{Sin}[x\ y], \{x, 0, 3\}, \{y, 0, 3\}].$$

Para volver a representar gráfica una función ya representada previamente tenemos el comando

$$\text{Show}[\%n].$$

Así, si escribimos

$$\text{In}[80] := \text{Show}[\%78],$$

obtenemos una nueva representación gráfica simultánea de las funciones $\sin x$ y $\sin 2x$.

5. Ecuaciones Diferenciales

Para finalizar estas prácticas, veamos como Mathematica es capaz de resolver ecuaciones diferenciales ordinarias. Podemos resolver tanto ecuaciones diferenciales de la forma

$$y' = f(x, y)$$

como problemas de condiciones iniciales de la forma

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

En primer lugar, hemos de aprender a escribir ecuaciones diferenciales de manera que Mathematica las entienda. Esto se hace siguiendo la siguiente forma

$$y'[x] == f[x, y[x]].$$

Para calcular todas las soluciones de dicha ecuación diferencial tenemos la sentencia

$$\text{DSolve}[y'[x] == f[x, y[x]], y[x], x],$$

indicando la ecuación y las variables dependiente e independiente. Así para resolver la ecuación $y' = xy$ escribiremos

$$\begin{aligned} \text{In}[81] &:= \text{DSolve}[y'[x] == x * y[x], y[x], x] \\ \text{Out}[81] &= \{\{y[x]- > \text{E}^{\frac{x^2}{2}} C[1]\}\} \end{aligned}$$

donde $C[1]$ es la constante que proviene de la integración.

Para resolver problemas de condiciones tenemos que utilizar la sentencia anterior escribiendo la ecuación diferencial y la condición inicial entre llaves y separadas por comas. Así el problema

$$\begin{cases} y' = xy \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

se resuelve escribiendo

$$\begin{aligned} \text{In}[82] &:= \text{DSolve}[\{y'[x] == x * y[x], y[1] == 2\}, y[x], x] \\ \text{Out}[82] &= \{\{y[x]- > 2\text{E}^{-\frac{1}{2}+\frac{x^2}{2}}\}\}. \end{aligned}$$

Mathematica también permite resolver ecuaciones lineales con coeficientes constantes y variables de orden mayor que uno, pero no permite obtener la solución de un problema de condiciones iniciales con una de estas ecuaciones. Para obtener la solución hemos de escribir la ecuación en forma de sistema de ecuaciones de orden uno, e indicar de forma separada las variables dependientes y la independiente. Por ejemplo, para resolver la ecuación

$$y'' + 2y' + y = 0$$

hemos de poner ésta como el sistema

$$\begin{cases} y' = x \\ x' = -y - 2x \end{cases}$$

y entonces escribiendo

$$\begin{aligned} \text{In}[82] := & \quad \text{DSolve}[\{y'[t] == x[t], x'[t] == -y[t] - 2y[t]\}, \{y[t], x[t]\}, t] \\ \text{Out}[82] \;\; = & \quad \{\{x[t]- > (\text{E}^{-t} - \text{E}^{-t}t)C[1] - \text{E}^{-t}tC[2], \\ y[t]- \;\; > & \quad \text{E}^{-t}tC[1] + (\text{E}^{-t} + \text{E}^{-t}t)C[2]\}\}, \end{aligned}$$

obtenemos la solución de la ecuación en función de las dos constantes de integración $C[1]$ y $C[2]$.