Variable Compleja & Transformadas (Matemáticas II)
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

E.T.S. Ingeniería Industrial ⊳ UPCT
Grado en Ingeniería Electrónica Industrial y Automática

Ejercicios del tema 5

Transformadas integrales. Estudio de dos casos particulares: Laplace y Fourier

1. Calcule, mediante la definición, la transformada de Laplace $\mathcal{L}(f)(z) = F(z)$ de las siguientes funciones elementales $f(t)$. Compruebe que el resultado coincide con el dado.

$f(t)$	$F(z)$
1	$\frac{1}{z}$; $\quad (\mathrm{Re}(z) > 0)$.
$\mathrm{sen}(t)$	$\frac{1}{z^2+1}$; $\quad (\mathrm{Re}(z) > 0)$.
$\mathrm{sen}(at)$	$\frac{a}{z^2+a^2}$; $\quad (\mathrm{Re}(z) > 0)$.
$\cos(at)$	$\frac{z}{z^2+a^2}$; $\quad (\mathrm{Re}(z) > 0)$.
$\exp(at)$	$\frac{1}{z-a}$; $\quad (\mathrm{Re}(z) > a)$.

2. Se define la función de **Heaviside** o función de salto en el origen mediante

$$h_0(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0. \end{cases}$$

La función de Heaviside o función de salto en el punto $a \geq 0$ se define

$$h_a(t) = h_0(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t \geq a. \end{cases}$$

Compruebe que la transformada de Laplace de $h_a(t)$ es $H_a(z) = \frac{\exp(-az)}{z}$, para $\mathrm{Re}(z) > 0$.

2012

Material docente elaborado por M. Moncayo. CC BY NC ND

3. Se define la distribución **delta de Dirac** centrada en el origen como

$$\delta_0(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0. \end{cases}$$

La distribución delta de Dirac centrada en el punto $a \geq 0$ se define mediante

$$\delta_a(t) = \delta_0(t-a) = \begin{cases} 1 & t = a \\ 0 & t \neq a. \end{cases}$$

La distribución delta de Dirac suele denominarse **impulso unitario**.

(a) Compruebe que la transformada de Laplace de $\delta_a(t)$ es $\exp(-az)$, para todo $a \geq 0$. Particularice el resultado para $a = 0$.

(b) Deduzca la **propiedad de filtrado** para toda función g, continua en $a \in \mathbb{R}$:

$$g(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(t-a) g(t)\, \mathrm{d}t.$$

4. Se define la función *Gamma de Euler* mediante

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} \exp(-x) x^{p-1} \mathrm{d}x; \quad p > 0.$$

(a) Mediante integración por partes, demuestre que para todo $p > 0$, se tiene que

$$\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p).$$

(b) Deduzca que $\Gamma(n+1) = n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) Utilizando lo anterior demuestre que la transformada de Laplace de t^a, con $a > -1$ es $F(z) = \dfrac{\Gamma(a+1)}{z^{a+1}}$, $\mathrm{Re}(z) > 0$. Deduzca la expresión de la transformada de Laplace de t^n, $n \in \mathbb{N}$.

5. Calcule, mediante la definición, la transformada de Laplace $\mathcal{L}(f)(z) = F(z)$ de las siguientes funciones elementales $f(t)$. Compruebe que el resultado coincide con el dado.

$f(t)$	$F(z)$
$\exp(at)t^b$, $b > -1$	$\dfrac{\Gamma(b+1)}{(z-a)^{b+1}}; \quad (\mathrm{Re}(z) > a).$
$\exp(at)t^n$	$\dfrac{n!}{(z-a)^{n+1}}; \quad (\mathrm{Re}(z) > a).$
$\exp(-at)\,\mathrm{sen}(bt)$	$\dfrac{b}{(z-a)^2 + b^2}; \quad (\mathrm{Re}(z) > a).$
$\exp(-at)\cos(bt)$	$\dfrac{z-a}{(z-a)^2 + b^2}; \quad (\mathrm{Re}(z) > a).$

6. Un muelle o un circuito LRC son ejemplos típicos de sistemas que se modelizan matemáticamente mediante una ecuación diferencial del tipo

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = u(t), \quad t \in [t_0, t_1). \tag{1}$$

t_1 puede ser infinito. La ecuación (1) cumple unas condiciones iniciales del tipo $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_1$, donde y_0, y_1 son valores conocidos. El término $u(t)$ se denomina *término fuente* o *estímulo* del sistema, mientras que $y(t)$ es la *respuesta* del sistema frente al estímulo $u(t)$ y representa la incógnita de la ecuación diferencial dada.

La función $y(t)$ se puede calcular mediante la teoría de la transformada de Laplace. Para ello, se hace uso de lo que se denomina **función de transferencia** del sistema. La función de transferencia es el cociente entre las transformadas de Laplace de la respuesta de salida y el estímulo de entrada, i.e.,

$$G(z) = \frac{\mathcal{L}(y(t))(z)}{\mathcal{L}(u(t))(z)} = \frac{Y(z)}{U(z)}. \tag{2}$$

Por tanto, $Y(z) = G(z)U(z)$. Aplicando las propiedades de convolución y de transformada inversa, obtenemos que

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y)(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(z)U(z))(t) = g(t) \star u(t).$$

En definitiva, es necesario calcular

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(z))(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{Y(z)}{U(z)}\right)(t).$$

En el caso de ecuaciones diferenciales del tipo (1), el cociente $\dfrac{Y(z)}{U(z)}$ suele ser una función racional, donde el grado del polinomio del numerador es inferior al grado del polinomio del denominador. La función racional se descompone como suma de fracciones simples. Los tipos de fracciones que más frecuentemente pueden presentarse en la descomposición son los siguientes:

- $R_1(z) = \dfrac{A}{z-a}$.
- $R_2(z) = \dfrac{A}{(z-a)^m}, \quad m \in \mathbb{N}, m > 1.$
- $R_3(z) = \dfrac{C + Dz}{(z-a)^2 + b^2}$

(a) Calcule $\mathcal{L}^{-1}(R_1)(t)$, $\mathcal{L}^{-1}(R_2)(t)$ y $\mathcal{L}^{-1}(R_3)(t)$.

(b) Establezca una relación entre $y(t)$ y la función de transferencia en el caso particular que $u(t) = \delta_0(t)$. Justifique que, en este caso, la función de transferencia se caracterice por ser la transformada de Laplace de la respuesta al impulso centrado en el origen.

7. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales dadas.

(a) $y''(t) - 2y'(t) + 5 = h_a(t), y(0) = 0, y'(0) = 0.$

(b) $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = u(t)$, $y(0) = 0, y'(0) = 1,$

$$u(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 2\pi \\ 2\cos(t) + 2\,\mathrm{sen}(t), & 2\pi \le t < 4\pi \\ 0, & t \ge 4\pi. \end{cases}$$

Material docente elaborado por M. Moncayo.

8. Justifique que no existe la transformada de Fourier de la funciones constantes en $\mathbb{R}$.

9. Compruebe que la transformada de Fourier de la función $f(t) = h_0(t)\ \exp(-at), a > 0$ es
$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{1}{a + i\omega}.$$

10. Sea $T > 0$. Compruebe que la transformada de Fourier de la función *pulso rectangular*
$$f(t) = \begin{cases} A & |t| \leq T, \\ 0 & |t| > T, \end{cases}$$
es
$$\mathcal{F}(f)(\omega) = 2AT\mathrm{senc}(\omega T),$$
donde $\mathrm{senc}(x)$ es la función **seno cardinal**,
$$\mathrm{senc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{sen}(x)}{x} & x \neq 0, \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$

11. Calcule los espectros de amplitud y fase de la función $f(t) = h_0(t)\ \exp(-at), a > 0$.

12. Calcule los espectros de amplitud y fase de la función *pulso rectangular*.

13. Calcule la transformada de Fourier de la función $f(t) = a\,\mathrm{senc}(b\,t)$; $a, b \in \mathbb{R}$.

14. Demuestre que la transformada de Fourier de una función par coincide con su transformada de Fourier coseno y que la transformada de Fourier de una función impar coincide salvo constante multiplicativa $-2i$ con su transformada de Fourier seno.

Material docente elaborado por M. Moncayo.