Variable Compleja & Transformadas (Matemáticas II)
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

E.T.S. Ingeniería Industrial ▷ UPCT
Grado en Ingeniería Electrónica Industrial y Automática

Ejercicios del tema 4

Integración en el plano complejo. Teorema del residuo y aplicaciones

1. Calcule las integrales $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ en los siguientes casos:

   (a) $f(z) = \mathrm{Re}(z)$; γ es la curva que definen los lados del triángulo de vértices $\{0, 1+i, 2\}$ con orientación positiva.

   (b) $f(z) = \bar{z}$; γ es la semicircunferencia unidad que contiene a $\{1, i, -1\}$ con orientación negativa.

   (c) $f(z) = \bar{z}|z|$; γ es la semicircunferencia unidad que contiene a $\{1, i, -1\}$ con orientación positiva.

   (d) $f(z) = \dfrac{z}{\bar{z}}$; γ es la curva representada en la Figura 1.

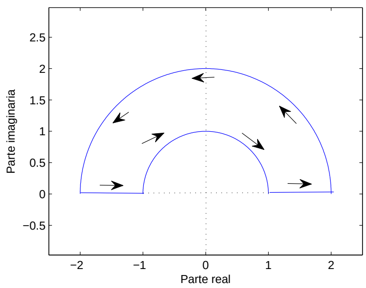

Figura 1

   (e) $f(z) = z^4$; γ es la curva representada en la Figura 2, que une los puntos $z_0 = -P+0i$ y $z_1 = P+0i$, $P = 8\pi$.

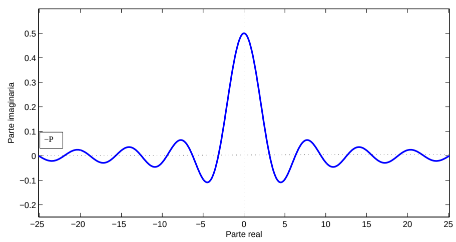

Figura 2

   (f) $f(z) = z\,\exp(z); \quad \gamma(t) = t^2 + it, t \in [0, \frac{4}{3}]$.

2. Calcule las siguientes integrales:

   (a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\operatorname{sen}(\exp(z))}{z}\,\mathrm{d}z; \quad \gamma(t) = \exp(it), t \in [0, 2\pi]$.

   (b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\exp(1/z)}{(z-1)^2}\,\mathrm{d}z; \quad \gamma(t) = 1 + \frac{\exp(it)}{2}, t \in [0, 2\pi]$.

   (c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z\exp(z)}{(z-i)^3}\,\mathrm{d}z; \quad \gamma(t) = i + \exp(it), t \in [0, 2\pi]$.

3. Calcule la integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{\exp(z)}{z(1-z)^2}\,\mathrm{d}z$, en los siguientes casos:

   (a) $\gamma(t) = r\exp(it), t \in [0, 2\pi], 0 < r < 1$.

   (b) $\gamma(t) = 1 + r\exp(it), t \in [0, 2\pi], 0 < r < 1$.

   (c) $\gamma(t) = r\exp(it), t \in [0, 2\pi], r > 1$.

4. Calcule la integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z^2+9}\,\mathrm{d}z$, en los siguientes casos:

   (a) $\gamma(t) = 3i + \exp(it), t \in [0, 2\pi]$.

   (b) $\gamma(t) = -2i + 2\exp(it), t \in [0, 2\pi]$.

   (c) $\gamma(t) = 4\exp(it), t \in [0, 2\pi]$.

   (d) $\gamma(t) = \exp(it), t \in [0, 2\pi]$.

5. Se considera γ la elipse de semiejes $a, b > 0$ y de ecuación cartesiana $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

   (a) Compruebe que

   $$\int_\gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi i. \tag{1}$$

   (b) Utilice (1) para demostrar que

   $$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\cos^2(t) + b^2\operatorname{sen}^2(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{ab}.$$

6. Calcule las siguientes integrales:

   (a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z-2}{32z^3 - 4z^2 - z}\,\mathrm{d}z; \quad \gamma(t) = i + r\exp(it), t \in [0, 2\pi]$.

   (b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{1-z^4}\,\mathrm{d}z; \quad \gamma(t) = \frac{3}{2}\exp(it), t \in [0, 2\pi]$.

   (c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{\cos(z)}\,\mathrm{d}z; \quad \gamma(t) = 5\exp(it), t \in [0, 2\pi]$.

   (d) $\displaystyle\int_\gamma \left(\frac{\exp(z)}{(z-1)^3} + z^9\operatorname{sen}\left(\frac{1}{z^2}\right)\right)\mathrm{d}z; \quad \gamma(t) = 2\exp(it), t \in [0, 2\pi]$.

7. Calcule las siguientes integrales de variable real aplicando el Teorema de los residuos:

   (a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos(t)}\,\mathrm{d}t$.

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3t)}{5-4\cos(t)}\,\mathrm{d}t.$

(c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{(5-3\,\mathrm{sen}(t))^2}\,\mathrm{d}t.$

8. Se considera la curva γ igual a la circunferencia de centro $0+0i$ y radio 2. Se define la función de variable real

$$\begin{array}{rcl} g:(0,+\infty) & \mapsto & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & g(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{\exp(zt)}{z^2(z^2+1)}\,\mathrm{d}z. \end{array}$$

(a) Calcule la expresión de $g(t)$.

(b) Compruebe que $\lim_{t\to 0} g(t) = 0$.

9. Se considera la curva γ igual a la circunferencia de centro $0+0i$ y radio 2. Aplicando el Teorema de los residuos, calcule la expresión de las siguientes funciones de variable real:

(a) $g(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{\exp(zt)}{z-2}\,\mathrm{d}z.$

(b) $g(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{\exp(zt)}{(z+1)^2}\,\mathrm{d}z.$