Variable Compleja & Transformadas (Matemáticas II)
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

E.T.S. Ingeniería Industrial ⊳ UPCT
Grado en Ingeniería Electrónica Industrial y Automática

Ejercicios del tema 3

Desarrollos de Laurent: Clasificación de singularidades y Transformada Z

1. Determine la región de convergencia de las siguientes series:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2 2^n}$.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\exp(n)}{(iz)^n}$.

   (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{4^n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{z^n}$.

2. Obtenga el desarrollo en serie de Taylor de las siguientes funciones centrados en el punto que se indica. Calcule el radio de convergencia en cada caso.

   (a) $f(z) = \exp(z), z_0 = 0$.

   (b) $f(z) = \operatorname{sen}(z), z_0 = 0$.

   (c) $f(z) = \cos(z), z_0 = 0$.

   (d) $f(z) = \dfrac{1}{1-z}, z_0 = 0$.

   (e) $f(z) = \dfrac{1}{1+z^3}, z_0 = 0$.

3. Obtenga el desarrollo en serie de Laurent de las siguientes funciones centrados en el punto que se indica. Indique el tipo de singularidad del punto z_0.

   (a) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen}(z)}{z^2}, z_0 = 0$.

   (b) $f(z) = \cos(1/z), z_0 = 0$.

   (c) $f(z) = \dfrac{\exp(z)}{z^3}, z_0 = 0$.

4. Obtenga el desarrollo en serie de Laurent de las siguientes funciones de manera que sea convergente en las regiones que se indican. Indique en cada caso los tipos de singularidades que aparecen.

   (a) $f(z) = \dfrac{2z+1}{z^2+z-2}$. Desarrollo convergente en $A(0;1,2) = \{z \in \mathbb{C}; 1 < |z| < 2\}$.

   (b) $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z^2-5z+6)}$. Desarrollo convergente en $A(0;0,2) = \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| < 2\}$.

   (c) $f(z) = \dfrac{2z+1}{z^2(z^5+z^3)}$. Desarrollo convergente en $A(0;0,1) = \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z| < 1\}$.

5. Sea $y[k]$ una señal discreta. Aplicando la transformada Z, obtenga la expresión general de $y[k]$, sabiendo que para cada $k \in \mathbb{N}$ verifica lo siguiente:

   (a) $y[k+1] - \dfrac{1}{2}y[k] = \dfrac{1}{5^k}, y[0] = 1.$

   (b) $y[k+2] + y[k+1] - 2y[k] = 1, y[0] = 0, y[1] = 1.$

   (c) $32y[k+2] - 4y[k+1] - y[k] = \dfrac{1}{2^k}, y[0] = 8, y[1] = 1.$