Variable Compleja & Transformadas (Matemáticas II)
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

E.T.S. Ingeniería Industrial ▷ UPCT
Grado en Ingeniería Electrónica Industrial y Automática

Ejercicios del tema 2

Funciones de Variable Compleja

1. Calcule la parte real, $u(x, y)$, y la parte imaginaria, $v(x, y)$, de las funciones $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ siguientes:

   (a) $f(z) = 3z^2 - iz$.

   (b) $f(z) = \bar{z} + \dfrac{1}{z}$.

   (c) $f(z) = z \exp(z)$.

2. Sea $C(0; 2) = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 2\}$ el círculo abierto de centro 0 y radio 2. Calcule y represente gráficamente el conjunto en el que se transforma $C(0; 2)$ al aplicarle a cada uno de sus puntos la función siguiente:

   (a) $f(z) = 3 + i + z$.

   (b) $f(z) = (1 + i)z$.

   (c) $f(z) = \dfrac{1}{z}$.

3. Halle los puntos que no pertenecen al dominio de las siguientes funciones:

   (a) $f(z) = \dfrac{1}{3 - z}$.

   (b) $f(z) = \exp(-1/z)$.

   (c) $f(z) = \dfrac{z^2 + 1}{(z + 2)(z^2 + 2z + 2)}$.

4. Calcule los siguientes valores en forma binómica:

   (a) $\exp(i) + \exp(\pi i)$.

   (b) $\operatorname{sen}(1 + i)$.

   (c) $\cos(-2i)$.

   (d) $\log(-1 - i)$.

   (e) $\log(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i)$.

   (f) $\log(-7\pi i)$.

5. Resuelva las siguientes ecuaciones

   (a) $\exp(z) + i = 0$.
   (b) $4\cos(z) + 5 = 0$.
   (c) $\exp(z) = 1 + i$.
   (d) $\operatorname{sen}(z) = 4$.

6. Estudie si las siguientes funciones de variable compleja son analíticas y en caso afirmativo calcule su derivada.

   (a) $f(z) = \bar{z}\operatorname{Im}(z)$.
   (b) $f(x + iy) = \exp(-y)\exp(ix)$.
   (c) $f(z) = z\bar{z}$.
   (d) $f(z) = (z^2 + \cos(z))\exp(z)$.
   (e) $f(x + iy) = xy + iy$.
   (f) $f(x + iy) = 3x + y + i(3y - x)$.

7. Compruebe que las siguientes funciones son armónicas y encuentre las correspondientes funciones holomorfas, $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Identifique f como función de z.

   (a) $u(x, y) = 2x(1 - y)$.
   (b) $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$.
   (c) $u(x, y) = 2\exp(x)\cos(y)$.
   (d) $u(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, con $f(\pi) = 1/\pi$.
   (e) $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$, con $f(i) = 2i - 1$.
   (f) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$, con $f(1) = 1$.

8. Determine para qué valores reales de a y b las siguientes funciones son armónicas. Para esos casos, halle las correspondientes funciones holomorfas, $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ e identifique f como función de z.

   (a) $u(x, y) = ax^2 + by^2 - xy + 2x + 3y - 1$.
   (b) $u(x, y) = x^3 + axy^2$.