Variable Compleja & Transformadas (Matemáticas II)
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

E.T.S. Ingeniería Industrial ▷ UPCT
Grado en Ingeniería Electrónica Industrial y Automática

Guión resumen del tema 5

Transformadas integrales. Estudio de dos casos particulares: Laplace y Fourier

1. Transformadas integrales

Consideremos $\mathcal{F}_1$ un conjunto de funciones de variable real o compleja y $\mathcal{F}_2$ un conjunto de funciones de variable compleja. Supongamos conocidas una función $f \in \mathcal{F}_1$ y una función K que depende de dos variables. Numerosas funciones en Análisis Matemático se definen mediante una expresión del tipo

$$\begin{aligned} T : \mathcal{F}_1 &\mapsto \mathcal{F}_2 \\ f(t) &\mapsto T(f)(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{K}(z,t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{1}$$

La transformada T se denomina **transformada integral** de la función f y K se llama **núcleo** de la transformada. Como consecuencia de la definición anterior, T es siempre **lineal**, i.e. si $A, B \in \mathbb{C}$, entonces

$$T(Af + Bg) = AT(f) + BT(g).$$

Además, si T^{-1} es la transformada inversa de T, es decir,

$$T^{-1}g = f \Leftrightarrow T(f) = g, \tag{2}$$

entonces se verifica que T^{-1} es también una transformada lineal.
Las transformadas del tipo (1) son especialmente útiles en la resolución de ecuaciones diferenciales y muchas ecuaciones integrales. Algunos **casos particulares** son los siguientes:

- **Transformada exponencial de Fourier**

$$f(t) \mapsto T(f)(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\exp(-izt)\,\mathrm{d}t.$$

- **Transformada coseno de Fourier**

$$f(t) \mapsto T(f)(z) = \int_{0}^{+\infty} f(t)\,\cos(zt)\,\mathrm{d}t.$$

- **Transformada seno de Fourier**

$$f(t) \quad \mapsto \quad T(f)(z) = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{sen}(zt)\,\mathrm{d}t.$$

- **Transformada de Laplace**

$$f(t) \quad \mapsto \quad T(f)(z) = \int_0^{+\infty} f(t)\,\exp(-zt)\,\mathrm{d}t.$$

- **Transformada de Mellin**

$$f(t) \quad \mapsto \quad T(f)(z) = \int_0^{+\infty} f(t)\,t^{z-1}\,\mathrm{d}t.$$

1.1. Relaciones entre transformadas

- **La transformada exponencial y las transformadas seno-coseno de Fourier**: Las transformadas seno y coseno son casos particulares de la transformada exponencial de Fourier. Basta considerar funciones $f(t)$ que se anulan para $t < 0$ y tener en cuenta la fórmula de Euler.
- **La transformada exponencial de Fourier y la transformada de Laplace**: Con la notación habitual, la transformada T se denota $\mathcal{F}$ en el caso de la transformada exponencial de Fourier y se escribe $\mathcal{L}$ en el caso de la transformada de Laplace. En realidad se trata de dos transformadas distintas y ninguna de ellas es la generalización de la otra. Sin embargo, podemos analizar dos situaciones especiales en las que siempre hay que hacer algún tipo de suposición *extra*.
  - Consideremos $z \in \mathbb{C}$, $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$ y $f \in \mathcal{F}_1$ tal que $f(t) = 0$ si $t < 0$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f)(z) &= \int_0^{+\infty} f(t)\,\exp(-zt)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\,\exp(-(x+yi)t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} (\exp(xt)f(t))\,\exp(-iyt)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} h_x(t)\,\exp(-iyt)\,\mathrm{d}t \\ &= \mathcal{F}(h_x)(y),\end{aligned}$$

    donde $h_x(t) = \exp(xt)f(t)$.
  - Consideremos una función f para la que se supone que su transformada de Laplace existe sobre el eje imaginario, i.e., existe en $z^{\mathrm{Im}} = iy, y \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\mathcal{L}(f)(z^{\mathrm{Im}}) = \mathcal{F}(f)(y).$$

1.2. Transformadas y productos: El producto de convolución

En general, la transformada de un producto no coincide con el producto de las transformadas, i.e. $T(fg) \neq T(f)T(g)$. Sin embargo, el posible definir un producto, que denotaremos $\star$ tal que

$$T(f \star g) = T(f)T(g),$$

siendo T una transformada integral del tipo (1). Más precisamente, si f y g son dos funciones integrables en $\mathbb{R}$, se define el **producto de convolución** entre ellas como

$$(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)\,g(u)\,\mathrm{d}u.$$

El producto de convolución es conmutativo, asociativo y distributivo respecto a la suma.

2. La transformada de Laplace

Sea $f(t)$ una función definida para $t \in [0, +\infty)$. Se define la transformada de Laplace de f como la función

$$\mathcal{L}(f)(z) = \int_0^{+\infty} f(t)\, \exp(-zt)\, \mathrm{d}t. \tag{3}$$

2.1. Consecuencias de la definición

- La función $\mathcal{L}(f)(z)$ también se suele denotar $F(z)$ o $\tilde{f}(z)$. A veces necesitaremos escribir $\mathcal{L}(f(t))(z)$ en lugar de $\mathcal{L}(f)(z)$. La variable t puede representar el **tiempo** mientras que la variable z, en base a la fórmula de Euler, representa la **frecuencia**. Por este motivo se suele decir que la transformada de Laplace actúa en el dominio de la frecuencia. Otras letras que suelen utilizarse para denotar la frecuencia son s y ω. Así, la transformada de Laplace también se escribe como $F(s)$ y $F(\omega)$. Nosotros emplearemos las notaciones $\mathcal{L}(f)(z)$ y la correspondiente mayúscula $F(z)$ para expresar la transformada de Laplace de $f(t)$.

- La función $\mathcal{L}(f)(z)$ solo está definida para $z \in \mathbb{C}$ tales que la integral impropia en (3) es absolutamente convergente. Por otro lado, al no intervenir los valores de $f(t)$ para $t < 0$, se considera que $f(t) = 0$ en $t < 0$.

- Existen funciones $f(t)$ para las que la integral impropia en (3) es mixta en lugar de ser de primera especie. Sin embargo, si la integral mixta es convergente en el extremo inferior, la transformada de Laplace está bien definida. Un ejemplo es $f(t) = 1/\sqrt{t}$. En general, la función f debe cumplir ciertas condiciones para que su transformada de Laplace exista. Algunas condiciones suficientes para la existencia de transformada de Laplace las enunciamos en el siguiente teorema:

Teorema: (i) Si $f(t)$ es continua a trozos y existen constantes $M > 0$, $T > 0$ y $c \in \mathbb{R}$ tales que

$$|f(t)| \leq M \exp(ct); \quad t > T, \tag{4}$$

entonces $\mathcal{L}(f)(z)$ existe para todo $z \in \mathbb{C}, z > c$. La condición (4) se conoce como "f de orden exponencial c".

(ii) Si $\lim_{t\to 0^+} f(t) = \infty$, f es continua a trozos en cualquier intervalo de la forma $(0, b)$, $\lim_{t\to 0} t^a f(t) = 0, a \in (0, 1)$ y f es de orden exponencial c, entonces $\mathcal{L}(f)(z)$ existe para todo $z \in \mathbb{C}, z > c$.

2.2. Propiedades de la transformada directa de Laplace

Continuidad Si $f : [0, +\infty) \mapsto \mathbb{C}$ es continua a trozos y de orden exponencial $c \in \mathbb{R}$, entonces $\mathcal{L}(f)(z)$ es continua en $(c, +\infty)$.

Derivación En este apartado vamos a ver dos resultados:

- **Transformada de una derivada:**
  Sea $f : [0, +\infty) \mapsto \mathbb{C}$ es continua y con derivada f' de orden exponencial y continua a trozos. Entonces

$$\mathcal{L}(f')(z) = z\mathcal{L}(f)(z) - f(0).$$

  Este resultado puede generalizarse del siguiente modo: Si $f^{n-1)}$ es continua y $f^{n)}$ es de orden exponencial y continua a trozos, entonces

$$\mathcal{L}(f^{n)})(z) = z^n\mathcal{L}(f)(z) - z^{n-1}f(0) - z^{n-2}f'(0) - \cdots - zf^{n-2)}(0) - f^{n-1)}(0).$$

- **Derivada de una transformada:**
Sea $f : [0, +\infty) \mapsto \mathbb{C}$ continua a trozos y de orden exponencial $c \in \mathbb{R}$. Entonces, para todo $z > c$ se tiene
$$(-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} [\mathcal{L}(f)(z)] = \mathcal{L}(t^n f(t))(z).$$

Integración Sea $f : [0, +\infty) \mapsto \mathbb{C}$ continua a trozos y de orden exponencial. Entonces

$$\mathcal{L}\left(\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x\right)(z) = \frac{1}{z}\mathcal{L}(f)(t) - \frac{1}{z}\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

En particular,
$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\right)(z) = \frac{1}{z}\mathcal{L}(f)(t).$$

Propiedades de valor inicial y final Los siguientes resultados muestran algunas propiedades de la función transformada de Laplace para valores grandes o pequeños de la variable z.

- Sea $f : [0, +\infty) \mapsto \mathbb{C}$ continua a trozos y de orden exponencial. Entonces
$$\lim_{z\to\infty} \mathcal{L}(f)(z) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{z\to\infty} z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\mathcal{L}(f)(z)) = 0.$$

- **Teorema del valor inicial:** Sea $f : [0, +\infty) \mapsto \mathbb{C}$ es continua y con derivada f' de orden exponencial y continua a trozos. Entonces
$$\lim_{z\to\infty} z\mathcal{L}(f)(z) = \lim_{t\to 0^+} f(t).$$

- **Teorema del valor final:** Sea $f : [0, +\infty) \mapsto \mathbb{C}$ es continua y con derivada f' de orden exponencial $c < 0$ y continua a trozos. Entonces
$$\lim_{z\to 0} z\mathcal{L}(f)(z) = \lim_{t\to\infty} f(t).$$

Traslaciones y cambios de escala Las siguientes propiedades se derivan directamente de la definición (3). La traslación se analiza en el dominio de la frecuencia y también en el del tiempo:

- **Primera fórmula de traslación:** Si $a \in \mathbb{R}$, entonces $\mathcal{L}(f(t))(z-a) = \mathcal{L}(\exp(at)f(t))(z)$.
- **Segunda fórmula de traslación:** Si $a > 0$ y $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es la **función de Heaviside**, definida como $h(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0, \end{cases}$ entonces
$$\mathcal{L}(f(t-a)h(t-a))(z) = \exp(-az)\mathcal{L}(f(t))(z).$$

- **Cambio de escala:** Sea $f : [0, +\infty) \mapsto \mathbb{C}$ continua a trozos y de orden exponencial c y $a > 0$. Entonces
$$\mathcal{L}(f(a\,t)(z) = \frac{1}{a}\mathcal{L}(f)\left(\frac{z}{a}\right).$$

Producto de convolución Si $f : [0, +\infty) \mapsto \mathbb{C}$ y $g : [0, +\infty) \mapsto \mathbb{C}$ son dos funciones continuas a trozos y de orden exponencial, entonces
$$\mathcal{L}(f \star g)(z) = \mathcal{L}(f)(z)\mathcal{L}(g)(z).$$

2.3. Transformada inversa de Laplace. Cálculo y propiedades

En esta sección denotaremos con letras mayúsculas a las correspondientes transformadas de las funciones en minúscula.

2.3.1. Cálculo

La transformada inversa, $\mathcal{L}^{-1}$ se define en base a (2), i.e.

$$\mathcal{L}^{-1}(G(z))(t) = \mathcal{L}^{-1}(G)(t) = g(t) \Leftrightarrow \mathcal{L}(g(t))(z) = \mathcal{L}(g)(z) = G(z).$$

A veces el cálculo de la transformada inversa se puede realizar combinando las propiedades que hemos visto. Sin embargo, en ocasiones resulta más adecuado aplicar el teorema del residuo, como ya anunciamos en el tema 4, (sección 4.2 (II)). En concreto, aplicando lo estudiado en ese apartado, tenemos lo siguiente: Si $G(z)$ es una función analítica en el interior y sobre una curva cerrada y simple γ, excepto en un número finito de singularidades aisladas $z_1, z_2, \cdots, z_n$, que pertenecen al interior de la curva. Entonces,

$$\mathcal{L}^{-1}(G(z))(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}(G(z)\exp(zt); z_i). \tag{5}$$

2.3.2. Propiedades

Denotaremos $\mathcal{L}^{-1}(F)(t) = f(t)$ y $\mathcal{L}^{-1}(G)(t) = g(t)$. Las propiedades se derivan de las vistas para la transformada directa.

Derivación $\mathcal{L}^{-1}(F^{n)})(t) = (-1)^n t^n f(t)$.

Integración $\mathcal{L}^{-1}\left(\int_0^z F(s)\,\mathrm{d}s\right)(t) = -\dfrac{f(t)}{t}$.

Traslaciones y cambios de escala Todas las propiedades son consecuencia de las que se verifican para la transformada directa.

Primera fórmula de traslación: Si $a \in \mathbb{R}$, entonces $\mathcal{L}^{-1}(F(z-a))(t) = \exp(at)f(t)$.

Segunda fórmula de traslación: Si $a > 0$, entonces

$$\mathcal{L}^{-1}(\exp(-az)F(z))(t) = f(t-a)h(t-a) = \begin{cases} f(t-a) & t \geq a \\ 0 & t < a. \end{cases}$$

Cambio de escala: Si $a > 0$, entonces, $\mathcal{L}^{-1}(F\left(\dfrac{z}{a}\right))(t) = af(at)$.

Convolución

$$\mathcal{L}^{-1}(FG)(t) = (\mathcal{L}^{-1}(F) \star \mathcal{L}^{-1}(G))(t).$$

3. La transformada de Fourier

Sea la función $f : (-\infty, +\infty) \mapsto \mathbb{C}$. Para cada $z \in \mathbb{R}$, se define la transformada de Fourier de f como la función

$$\mathcal{F}(f)(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\exp(-izt)\,\mathrm{d}t. \tag{6}$$

3.1. Consecuencias de la definición

- La función $\mathcal{F}(f)(z)$ también se suele denotar $F(z)$, $\hat{f}(z)$. Al igual que ocurre con la transformada de Laplace, la variable t representa el tiempo y la variable z representa la frecuencia. La transformada de Fourier $\mathcal{F}(f)(z)$ proporciona información de f a frecuencia z. En el caso de la transformada de Fourier la notación más habitual es considerar $z = \omega$. Nosotros utilizaremos $\mathcal{F}(f)(\omega)$.

- El valor de $\mathcal{F}(f)(\omega)$ para cada $\omega \in \mathbb{R}$ es, generalmente, un número complejo a causa del término $\exp(-i\omega t)$, i.e. $\mathcal{F}(f)(\omega) \in \mathbb{C}$. En consecuencia, tiene sentido representar gráficamente el módulo $|\mathcal{F}(f)(\omega)|$ y el argumento principal $\arg_{\mathrm{p}}(\mathcal{F}(f)(\omega))$. Estas gráficas se denominan respectivamente **espectro de amplitud** y **espectro de fase** de f. Si para alguna función $f(t)$ se tiene que $\mathcal{F}(f)(\omega)$ es un número real, entonces es posible representar la función $\omega \mapsto \mathcal{F}(f)(\omega)$, que se denomina **espectro de frecuencia**.

- La transformada de Fourier de una función $f : (-\infty, +\infty) \mapsto \mathbb{C}$ solo está definida si la integral impropia en (6) es convergente. Un condición suficiente para la existencia de transformada de Fourier la enunciamos en el siguiente teorema:

  Teorema (Condiciones de Dirichlet): Si $f : (-\infty, +\infty) \mapsto \mathbb{C}$ es una función absolutamente integrable en $\mathbb{R}$, i.e., $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, \mathrm{d}t < \infty$ y en cada subintervalo de $\mathbb{R}$ la función f es continua salvo un número finito de discontinuidades de salto, entonces $\mathcal{F}(f)(\omega)$ existe para todo $\omega \in \mathbb{R}$.

3.2. Propiedades de la transformada de Fourier

En adelante supondremos que las funciones que aparecen cumplen las condiciones de Dirichlet. Aparte de la propiedad de linealidad, enunciamos también las siguientes:

Simetría Si $f(t)$ es una función real, entonces $\mathcal{F}(f)(\omega) = \overline{\mathcal{F}(f)(-\omega)}$, $\omega \in \mathbb{R}$. En particular, $|\mathcal{F}(f)(\omega)| = |\mathcal{F}(f)(-\omega)|$, i.e., el espectro de amplitudes es una función par.

Paridad Si f es una función par, entonces su transformada de Fourier coincide con la transformada coseno aplicada a f. Si f es una función impar, entonces su transformada de Fourier coincide (salvo constante multiplicativa $-2i$) con la transformada seno aplicada a f.

Derivación En este apartado vamos a ver dos resultados:

- **Transformada de una derivada** Si f y f' verifican las condiciones de Dirichlet, entonces
$$\mathcal{F}(f')(\omega) = (i\omega)\mathcal{F}(f)(\omega).$$
Este resultado puede generalizarse. Para ello, suponemos que $f, f', \cdots f^{n)}$ cumplen las condiciones de Dirichlet. Entonces
$$\mathcal{F}(f^{n)})(\omega) = (i\omega)^n \mathcal{F}(f)(\omega).$$

- **Derivada de una transformada** Si la función $tf(t)$ verifica las condiciones de Dirichlet, entonces
$$(-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\omega^n} [\mathcal{F}(f)(\omega)] = i^n \mathcal{F}(t^n f(t))(\omega).$$

Identidad de Parseval (Conservación de la energía) La energía total de una función $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ se define como
$$\mathcal{E}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\, \mathrm{d}t.$$

Si una función tiene energía total finita, entonces su transformada de Fourier también tiene energía total finita. En concreto, se tiene la **Identidad de Parseval** o propiedad de conservación de la energía:

$$\mathcal{E}(f) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{E}(\mathcal{F}(f)).$$

La representación gráfica de la función $\omega \mapsto |\mathcal{F}(f)(\omega)|^2$ se denomina **espectro de energía** de $f(t)$.

Traslación Esta propiedad, al igual que ocurre con la transformada de Laplace, se analiza tanto en el dominio de la frecuencia como en el del tiempo:

- **Primera fórmula de traslación:** $\mathcal{F}(f(t))(\omega - a) = \mathcal{F}(\exp(iat)f(t))(\omega)$.
- **Segunda fórmula de traslación:** $\mathcal{F}(f(t-a))(\omega) = \exp(-ia\omega)\mathcal{F}(f(t))(\omega)$.

Cambio de escala Si $a \neq 0$, entonces

$$\mathcal{F}(f(a\,t)(\omega) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}(f)\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Convolución Si f y g verifican las condiciones de Dirichlet, entonces

$$\mathcal{F}(f \star g)(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega)\mathcal{F}(g)(\omega).$$

Además se verifica,

$$\mathcal{F}(fg)(\omega) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(f)(\omega) \star \mathcal{F}(g)(\omega).$$

3.3. Transformada inversa de Fourier

También denotaremos con letras mayúsculas a las correspondientes transformadas de las funciones en minúscula. La transformada inversa, $\mathcal{F}^{-1}$ se define en base a (2), i.e.

$$\mathcal{F}^{-1}(F(\omega))(t) = \mathcal{F}^{-1}(F)(t) = f(t) \Leftrightarrow \mathcal{F}(f(t))(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega) = F(\omega).$$

- **Cálculo** En el caso de la transformada de Fourier, el cálculo de la transformada inversa se realiza mediante
$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}(F)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\exp(i\omega t)\,\mathrm{d}\omega.$$
- **Propiedades**

Dualidad Si las funciones $\{f(t), F(\omega)\}$ forman "un par", donde primero escribimos la función que depende del tiempo y después la que depende de la frecuencia, entonces también se tiene que las funciones $\{F(t), 2\pi f(-\omega)\}$ forman "par".

Otras El resto de propiedades de la transformada inversa se derivan de las propiedades de la transformada directa. Por citar dos ejemplos, si $a \in \mathbb{R}$, entonces

$$\mathcal{F}^{-1}(F(\omega - a))(t) = \exp(at)f(t)$$

y

$$\mathcal{F}^{-1}(FG)(t) = (\mathcal{F}^{-1}(F) \star \mathcal{F}^{-1}(G))(t).$$

3.4. Transformada de Fourier de una sucesión

Supongamos que $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{C}$, i.e, $f(k) = f_k$, $k \in \mathbb{N}$, es una sucesión. Se define su transformada de Fourier como

$$\mathcal{F}(f_k)(\omega) = F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(n) \, \exp(-i\omega n), \tag{7}$$

siempre que la serie anterior sea convergente. Su transformada inversa es

$$f_k = \mathcal{F}^{-1}(F)(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\omega) \, \exp(i\omega k) \, \mathrm{d}\omega.$$

Observaciones

- $F(\omega)$ en (7) es una función continua en ω.
- $F(\omega)$ se expresa en términos de $\exp(-i\omega)$, tenemos que F es periódica de periodo máximo 2π, con independencia de que la sucesión f_k sea o no periódica.

3.5. Transformada de Fourier en tiempo y frecuencia discretos

Sea $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{C}$ una sucesión f_k para la que se conocen N valores equiespaciados y distantes entre sí una cantidad igual a T, i.e. $f_k = f(kT), k = 0, 1, \cdots, N-1$. Consideremos N valores de la frecuencia ω en el intervalo $[0, 2\pi/T]$. La distancia entre estos valores es $\Omega = \frac{2\pi}{NT}$, por lo que ω define la sucesión de valores $\omega_n = n\Omega, k = 0, 1, \cdots, N-1$. Se definen respectivamente la transformada de Fourier discreta y su inversa como:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f_k) = F_n &= \sum_{k=0}^{N-1} f_k \, \exp(-i\,k\,n\,\Omega\,T), \\ f_k = \mathcal{F}^{-1}(F)(k) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n \, \exp(i\,k\,n\,\Omega\,T). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la definición de Ω, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f_k) = F_n &= \sum_{k=0}^{N-1} f_k \, \exp\left(-\frac{2\,i\,k\,n\,\pi}{N}\right), \\ f_k = \mathcal{F}^{-1}(F)(k) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n \, \exp\left(\frac{2\,i\,n\,k\,\pi}{N}\right). \end{aligned}$$

Este par de transformadas hacen, en relación a señales discretas, el mismo papel que la transformada de Fourier (6) y su inversa para señales continuas. El coste computacional de estas últimas expresiones es bastante alto, pues requiere N^2 multiplicaciones complejas y $N(N-1)$ sumas. El algoritmo computacionalmente eficiente que calcula la transformada de Fouier discreta define lo que se conoce como *fast Fourier transform* o FFT.