Guión resumen del tema 4

Integración en el plano complejo. Teorema del residuo y aplicaciones

1. Preliminares: Curvas paramétricas en $\mathbb{C}$.

Se define una curva continua en $\mathbb{C}$ como una función compleja de variable real, i.e.

$$\begin{aligned} \gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{C} \\ t &\mapsto z = \gamma(t) \\ t &\mapsto z = \gamma(t) = x(t) + iy(t), \end{aligned} \tag{1}$$

donde x e y son funciones continuas. La función $z = \gamma(t)$ se suele denominar **curva paramétrica**, pues depende del parámetro **real** t. Sean $\gamma_1 : [a,b] \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ y $\gamma_2 : [b,c] \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ con $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. Se llama curva **unión** de γ_1 y γ_2 a la curva $\gamma(t) = \gamma_1 \cup \gamma_2$, definida como

$$\begin{aligned} \gamma : [a,c] \subset \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{C} \\ t &\mapsto \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a,b] \\ \gamma_2(t) & t \in (b,c]. \end{cases} \end{aligned}$$

Se define la curva opuesta a (1) como la curva

$$\begin{aligned} \gamma^\star : [-b,-a] \subset \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{C} \\ t &\mapsto \gamma^\star(t) = \gamma(-t). \end{aligned}$$

Normalmente se denota $\gamma^\star = -\gamma$.

Algunos términos de uso común son los siguientes:

- La curva es **cerrada** si $\gamma(a) = \gamma(b)$.
- La curva es **simple** si no se autocorta, i.e. para $t, s \in [a,b]$ con $t \neq s$, se tiene que $\gamma(t) \neq \gamma(s)$.
- Toda curva continua cerrada y simple se denomina curva de **Jordan**.
- Se dice que una región $\mathcal{R}$ es **simplemente conexa** si el interior de cualquier curva de Jordan contenida en $\mathcal{R}$ pertenece también a $\mathcal{R}$.

- Una región se denomina **múltiplemente conexa** si no es simplemente conexa.
- Si γ es una curva de Jordan, se dice que tiene **orientación positiva** si se recorre su frontera en sentido contrario a las agujas del reloj. En otro caso, la orientación es negativa.

Algunos ejemplos elementales de curvas en $\mathbb{C}$ son:

- El **segmento** que une dos puntos $z_0 \in \mathbb{C}, z_1 \in \mathbb{C}$:

$$\begin{array}{rcl} \gamma : [0,1] \subset \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & z = \gamma(t) = (1-t)z_0 + tz_1. \end{array}$$

- La **circunferencia** de centro $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ y radio $r > 0$:

$$\begin{array}{rcl} \gamma : [0,2\pi) \subset \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & z = \gamma(t) = (x_0 + r\cos(t)) + i(y_0 + r\,\mathrm{sen}(t)) = z_0 + r\exp(it). \end{array}$$

- La **elipse** de semiejes reales a y b, centrada en el origen:

$$\begin{array}{rcl} \gamma : [0,2\pi) \subset \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & z = \gamma(t) = a\cos(t) + (b\,\mathrm{sen}(t))\, i. \end{array}$$

Conviene recordar que la representación de las curvas no es única. Es posible definir distintas reparametrizaciones para una misma curva. Sin embargo, las propiedades características de las curvas son invariantes frente al cambio de parámetros. En general, se dice que la curva (1) es continuamente diferenciable si y solo si existe $z'(t) = \gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$ y es continua. En este caso, tiene sentido definir la **longitud** de γ mediante la expresión usual:

$$\mathrm{long}(\gamma) \;=\; \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t,$$

y teniendo en cuenta la definición de módulo, se tiene que

$$\mathrm{long}(\gamma) \;=\; \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Se dice que γ es **regular** si es diferenciable y $\gamma'(t) \neq 0$, para todo $t \in [a,b]$.

2. Definición de la integral de una función de variable compleja

Sea $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \mapsto A \subset \mathbb{C}$ una curva regular y $f : A \subset \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ una función continua de variable compleja. Se define la integral de f a lo largo de la curva γ, y se representa $\displaystyle\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$, a la siguiente integral (de variable real):

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\mathrm{d}t. \tag{2}$$

Algunas propiedades de la integral $\displaystyle\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$ son las siguientes:

- La integral definida sobre curvas es lineal.
- $\displaystyle\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = -\int_{-\gamma} f(z)\mathrm{d}z.$

- $\displaystyle\int_{\gamma_1\cup\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z.$
- Si existe $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z = \gamma(t)$, entonces

$$\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z\right| \leq M\mathrm{long}(\gamma).$$

3. Teoremas fundamentales para la integración de funciones de variable compleja

3.1. La regla de Barrow en $\mathbb{C}$

Se dice que una función $F(z)$ es una **primitiva** de una función $f(z)$ en una región $A \subset \mathbb{C}$ si F es analítica en A y cumple que $\dfrac{\mathrm{d}F(z)}{\mathrm{d}z} = f(z)$ para todo $z \in A$. Sea $f(z)$ una función analítica en una región simplemente conexa R. Sea $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \mapsto R \subset \mathbb{C}$, cualquier curva regular contenida en R y tal que $\gamma(a) = z_0$ y $\gamma(b) = z$. Entonces $F(z) = \displaystyle\int_\gamma f(w)\mathrm{d}w$ es una primitiva de f en A y

$$\int_\gamma f(w)\mathrm{d}w = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(z) - F(z_0).$$

Sea f una función continua sobre una región simplemente conexa R. El resultado anterior nos permite asegurar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) Existe una función F que es una primitiva de f en R.

(b) Si γ_1 y γ_2 son dos curvas regulares contenidas en R que unen los puntos z_0 y z_1, entonces

$$\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z.$$

(c) Si Γ es una curva cerrada contenida en R, entonces $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$

3.2. El teorema de Cauchy para regiones simplemente conexas

Sea $f(z)$ una función analítica en una región simplemente conexa R y γ una curva cerrada y simple contenida en R. Entonces $\displaystyle\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$. Si además, f es continua en $\bar{R} = R \cup \rho$, donde ρ es la curva frontera de R, entonces $\displaystyle\int_\rho f(z)\mathrm{d}z = 0.$

3.3. El teorema de Cauchy para regiones múltiplemente conexas

Consideremos en el plano complejo n curvas cerradas y simples, $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_{n-1}$, orientadas en sentido positivo y tales que γ_0 contiene a todos los demás contornos en su interior. El conjunto de los puntos de $\mathbb{C}$ que están contenidos simultáneamente en el interior de γ_0 y en los exteriores de $\gamma_1, \cdots, \gamma_{n-1}$ es una región múltiplemente conexa R. La curva ρ, frontera de R, la forman las curvas $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_{n-1}$. Bajo estas condiciones, si $f(z)$ una función analítica en R y continua en $\bar{R} = R \cup \rho$, entonces $\displaystyle\int_\rho f(z)\mathrm{d}z = 0.$

3.4. Fórmulas integrales de Cauchy

- Sea $h(z)$ una función analítica en una región $A \subset \mathbb{C}$ y γ una curva cerrada y simple contenida en A orientada en sentido positivo. Supongamos que $z_0 \in \mathrm{int}(\gamma)$. Entonces
$$h(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{h(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z.$$
En particular,
$$\int_\gamma \frac{h(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = (2\pi i)\, h(z_0).$$

- Sea $h(z)$ una función analítica en una región $A \subset \mathbb{C}$ y γ una curva cerrada y simple contenida en A orientada en sentido positivo. Supongamos que $z_0 \in \mathrm{int}(\gamma)$. Entonces existen todas las derivadas de h en A y
$$h^{n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{h(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z; \quad (n = 1, 2, 3 \cdots).$$
En particular,
$$\int_\gamma \frac{h(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{n!}\, h^{n)}(z_0); \quad (n = 1, 2, 3 \cdots).$$

4. Cálculo de residuos

El desarrollo de Laurent de una función f, analítica en un anillo centrado en $z_0 \in \mathbb{C}$ y delimitado por circunferencias de radios $r < R$, i.e., analítica en el anillo $A(z_0; r, R) = \{z \in \mathbb{C};\ r < |z - z_0| < R\}$, establece que para todo $z \in A(z_0; r, R)$, se tiene que
$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}. \tag{3}$$
El coeficiente b_1 de la parte principal del desarrollo y que aparece multiplicando al término $\dfrac{1}{z - z_0}$ se denomina **residuo** de f en z_0 y se denota mediante $\mathrm{Res}(f; z_0)$. En general, calcular $\mathrm{Res}(f; z_0)$ equivale a calcular cuál es el coeficiente que multiplica al término $\dfrac{1}{z - z_0}$ en el desarrollo (3). Sin embargo, en ocasiones, el cálculo de $\mathrm{Res}(f; z_0)$ puede llevarse a cabo de una forma más sencilla. Tal es el caso cuando z_0 es un polo de orden k de una función racional.

- Si z_0 es un polo de orden $k = 1$, entonces
$$\mathrm{Res}(f; z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)\, f(z).$$

- Si z_0 es un polo de orden $k = 2$, entonces
$$\mathrm{Res}(f; z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left[(z - z_0)^2\, f(z) \right].$$

- Si z_0 es un polo de orden k, entonces
$$\mathrm{Res}(f; z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}^{(k-1)}}{\mathrm{d}z^{(k-1)}} \left[(z - z_0)^k\, f(z) \right].$$

4.1. Teorema del residuo

En el tema 3 se mencionó que el valor del coeficiente b_1 o residuo es importante para calcular ciertas integrales. En concreto, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 1: Sea $f(z)$ es una función analítica en una región $\mathcal{R}$ tal que $f(z)$ tiene una singularidad en z_0 con residuo b_1 en z_0. Consideremos γ una circunferencia alrededor de z_0 y contenida en el anillo de convergencia de f. Entonces

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{Res}(f; z_0).$$

Por tanto, si se conoce $\operatorname{Res}(f; z_0)$ se pueden calcular integrales de la forma $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$. Este resultado se puede generalizar como sigue:

Proposición 2: Sea $f(z)$ es una función analítica en una región $\mathcal{R}$ tal que $f(z)$ tiene dos singularidades, z_0 y z_1 en el interior de una curva cerrada y simple $\gamma \subset \mathcal{R}$. Entonces,

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f; z_0) + \operatorname{Res}(f; z_1)\right).$$

El enunciado del caso general, correspondiente a n singularidades se conoce como **Teorema del residuo:**

Teorema del residuo:
Sea f una función analítica en el interior y sobre una curva cerrada y simple γ, excepto en un número finito de singularidades aisladas $z_1, z_2, \cdots, z_n$ que pertenecen al interior de la curva. Entonces,

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \left(\sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}(f; z_i)\right).$$

4.2. Algunas aplicaciones del Teorema del residuo

(I) **Aplicación al cálculo de integrales reales**
En las condiciones del Teorema del residuo y, teniendo en cuenta que siempre se verifica (2), obtenemos que la integral de variable real

$$\int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi i \left(\sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}(f; z_i)\right).$$

(II) **Aplicación a la definición de transformadas inversas**
Un caso particularmente interesante es el que se obtiene al tomar $f(z)$ en el Teorema del Residuo como una función de la forma $f(z) = G(z)\exp(zt); t \in \mathbb{R}$. Supongamos que $G(z)$ es una función analítica en el interior y sobre una curva cerrada y simple γ, excepto en un número finito de singularidades aisladas $z_1, z_2, \cdots, z_n$, que pertenecen al interior de la curva. Entonces, por el Teorema del residuo,

$$\int_\gamma G(z)\exp(zt)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \left(\sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}(G(z)\exp(zt); z_i)\right).$$

Denotaremos

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma G(z)\exp(zt)\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}(G(z)\exp(zt); z_i). \tag{4}$$

Bajo ciertas condiciones sobre G, se puede demostrar que

$$\int_0^\infty g(t)\, \exp(-zt)\, \mathrm{d}t = G(z). \tag{5}$$

Consideremos $\mathcal{F}_1$ un conjunto de funciones de variable real o compleja y $\mathcal{F}_2$ un conjunto de funciones de variable compleja. Si se define una transformada

$$\begin{aligned} T : \mathcal{F}_1 &\mapsto \mathcal{F}_2 \\ g &\mapsto T(g) = \int_0^\infty g(t)\, \exp(-zt)\, \mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{6}$$

entonces, por (5), se tiene que $T(g) = G$ o también $T^{-1}(G) = g$. Si tenemos un problema en el que el dato es $G(z)$, la fórmula (4) nos proporciona una expresión para $T^{-1}(G)$.

NOTA: La transformada T definida en (6)se estudia en la primera parte del tema siguiente.