Variable Compleja & Transformadas (Matemáticas II)
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

E.T.S. Ingeniería Industrial ▷ UPCT
Grado en Ingeniería Electrónica Industrial y Automática

Guión resumen del tema 1

Operaciones con números complejos

Definición

Un número complejo es un elemento del conjunto

$$\mathbb{C} = \{x + yi;\, x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\},$$

y se escribe $z \in \mathbb{C}$ para denotarlo.

- El número i representa a la **unidad imaginaria** y verifica $i^2 = -1$.
- Si $z = x + yi$, entonces x es la **parte real** de z e y es la **parte imaginaria** de z. Se denotan $x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$. Dos números complejos son iguales si y solo si ambos tienen la misma parte real y la misma parte imaginaria.
- Se define el **conjugado** de $z = x + yi$ mediante $\bar{z} = x - yi$.
- El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, está estrictamente contenido en $\mathbb{C}$ y corresponde al subconjunto de complejos de parte imaginaria nula.

Operaciones elementales I

En lo sucesivo, $z = a + bi$ y $w = c + di$ representan dos números complejos cualesquiera. Se definen las operaciones siguientes:

1. Suma: $z + w = (a + c) + (b + d)i$.
2. Producto: $zw = (ac - bd) + (ad + bc)\,i$.
3. División: $\dfrac{z}{w} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \left(\dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right) i; \quad (w \neq 0)$.

- Con la suma y el producto anteriores el conjunto $\mathbb{C}$ tiene estructura de **espacio vectorial**. Como espacio vectorial, la dimensión de $\mathbb{C}$ es 2.
- Aunque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, existe una diferencia fundamental entre ambos conjuntos ya que en $\mathbb{C}$ **no puede definirse** una relación de orden "$<$" entre sus números.

Módulo de un número complejo

Se define **módulo** de $z = x + yi$ al número $|z| = +\sqrt{x^2 + y^2}$. Si z es un número real, el módulo coincide con el **valor absoluto**. El módulo verifica las siguientes propiedades:

1. $|z| \in \mathbb{R}, |z| \geq 0$.
2. $|z|^2 = z\bar{z}$.
3. $|zw| = |z||w|$.
4. $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}; \quad (w \neq 0)$.
5. **Desigualdad triangular:** $|z + w| \leq |z| + |w|$.
6. **Desigualdad triangular contraria:** $|z - w| \geq ||z| - |w||$.
7. **Identidad del paralelogramo:** $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$.

El módulo permite definir una **distancia** en $\mathbb{C}$ mediante

$$\mathrm{dist}(z, w) = |z - w|.$$

Por tanto, $\mathbb{C}$ es un espacio métrico.

Representación gráfica de los números complejos

Los números complejos se representan mediante los puntos de un plano llamado **plano complejo**. En concreto, el número $z = x + yi$ se representa en el plano XY de como el punto de $\mathbb{R}^2$ de coordenadas cartesianas (x, y). En consequencia, existe una correspondencia biunívoca entre $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2$. Este hecho se denota $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$.

Forma binómica, forma polar, forma trigonométrica y forma exponencial de un número complejo

1. Se llama **forma binómica** de un número $z \in \mathbb{C}$ a su representación como

   $$z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)\, i$$

   .

2. Se llama **forma polar** de un número $z = a + bi \in \mathbb{C}$ a su representación como $z = r_\alpha$, donde $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y α es cualquier elemento del conjunto de los argumentos de z,

   $$\alpha \in \mathrm{Arg}(z) = \left\{\arctan\left(\frac{b}{a}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

   La definición anterior tiene sentido si $\arctan\left(\frac{b}{a}\right) \in \mathbb{R}$. Además, este valor depende de los signos de a y b. Cualquier elemento del conjunto $\mathrm{Arg}(z)$ se denotará mediante $\arg(z)$. El argumento $\arg(z)$ que pertenece al intervalo $[-\pi, \pi]$ se llama argumento principal de z y se representa $\arg_{\mathrm{p}}(z)$.

3. Se llama **forma trigonométrica** de un número $z \in \mathbb{C}$ a la representación

   $$z = r(\cos(\alpha) + i\ \mathrm{sen}(\alpha)); \quad (r = |z|, \alpha \in \mathrm{Arg}(z)). \tag{1}$$

4. Se llama **forma exponencial** de un número número $z \in \mathbb{C}$ a su representación

   $$z = r\ \exp(i\alpha); \quad (r = |z|, \alpha \in \mathrm{Arg}(z)). \tag{2}$$

Operaciones elementales II

Potencias enteras de un número complejo

Sean $z_1 = r_1(\cos(\alpha_1) + i\ \text{sen}(\alpha_1))$ y $z_2 = r_2(\cos(\alpha_2) + i\ \text{sen}(\alpha_2))$ dos números complejos en forma trigonométrica según (1). Entonces:

- $$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i\ \text{sen}(\alpha_1 + \alpha_2)). \tag{3}$$

  Por tanto,

  $$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= r_1 r_2 (= |z_1||z_2|). \\ \arg(z_1 z_2) &= \arg(z_1) + \arg(z_2). \end{aligned}$$

  Como consecuencia de (3), tenemos la **fórmula de deMoivre**:

  $$(r(\cos(\alpha) + i\ \text{sen}(\alpha)))^n = r^n(\cos(n\alpha) + i\ \text{sen}(n\alpha)); \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i\ \text{sen}(\alpha_1 - \alpha_2))$. En consecuencia,

  $$\begin{aligned} \left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= \frac{r_1}{r_2}\left(= \frac{|z_1|}{|z_2|}\right). \\ \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \arg(z_1) - \arg(z_2). \end{aligned}$$

Ecuaciones polinómicas y raíces de un número complejo

Una ecuación polinómica en $\mathbb{C}$ es una ecuación del tipo

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0; \quad (n \in \mathbb{N}, n \neq 0, a_k \in \mathbb{C}, k = 0, 1, \cdots, n). \tag{4}$$

La expresión $p_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, con $a_n \neq 0$ se denomina polinomio de grado n. Si $n \geq 1$, entonces la ecuación $p_n(z) = 0$ tiene al menos una solución o raíz. El **Teorema Fundamental del Álgebra** asegura que $p_n(z) = 0$ tiene exactamente n raíces en $\mathbb{C}$, no necesariamente distintas: $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$. En este caso, el polinomio se factoriza como

$$p_n(z) = a_n(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n).$$

Sea $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Se llama **multiplicidad de la raíz** α_k al número de veces en las que aparece α_k en el conjunto $\mathcal{A}$. Sea $l \in \mathbb{N}, l \geq 1$. Se dice que α_k es un **cero de orden** l si la multiplicidad de α_k es l.

En particular, si la ecuación (4) es del tipo $z^n = w$, donde $w = R(\cos(\beta) + i\,\text{sen}(\beta))$ es un número complejo **conocido**, existe una fórmula para calcular las n soluciones (o valores de $z = \sqrt[n]{w}$), que son las raíces n-ésimas del número complejo w.

En concreto, $\sqrt[n]{w} = z_k, \quad k = 0, \cdots n-1$ donde cada z_k viene dada por

$$z_k = r(\cos(\alpha_k) + i\,\text{sen}(\alpha_k)), \text{ con } r = +\sqrt[n]{R} \in \mathbb{R} \text{ y } \alpha_k = \frac{\beta + 2k\pi}{n}; \qquad (k = 0, 1, \cdots, n-1).$$