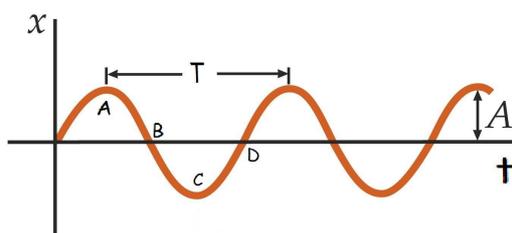


## TEMA 5: MOVIMIENTO OSCILATORIO (RESUMEN)

### DEFINICIONES PREVIAS

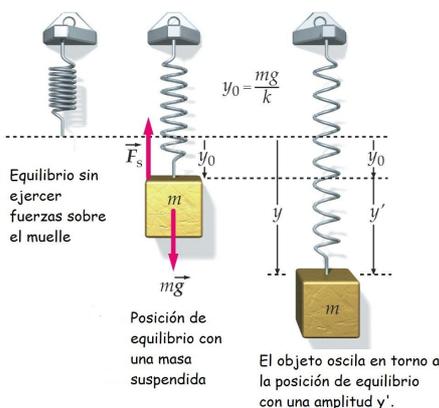
En la expresión que describe el movimiento armónico simple que veremos en el siguiente apartado aparecen diversas magnitudes que es necesario definir previamente. A continuación definimos dichas magnitudes junto con otras asociadas también al movimiento oscilatorio:

- **AMPLITUD ( $A$ )**: máximo desplazamiento de la partícula en su movimiento oscilatorio.
- **ELONGACIÓN ( $x$  ó  $y$ )**: es la posición de la partícula en un instante de tiempo determinado.
- **PERÍODO ( $T$ )**: es el intervalo temporal tras el cual el movimiento se repite. Es decir,  $x(t)=x(t+T)$ .
- **FRECUENCIA ( $\nu$ )**: es la inversa del periodo, por lo que representa el número de oscilaciones por unidad de tiempo.  $\nu = \frac{1}{T}$
- **FRECUENCIA O VELOCIDAD ANGULAR ( $\omega$ )**: es la frecuencia pero expresada en rad/s. Por lo tanto:  $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$
- **FASE ( $\phi$ )**: es el argumento de la función trigonométrica que representa a la oscilación,  $\phi = \omega t + \phi_0$ , donde  $\omega t$  va en radianes.



### ESTUDIO DEL MUELLE Y DEL PÉNDULO

#### 1.-MUELLE



La descripción matemática de este movimiento viene determinada por la ley de Hooke:

$$F = -kx \quad \text{donde } k \text{ es la constante recuperadora del muelle, } k = m\omega^2$$

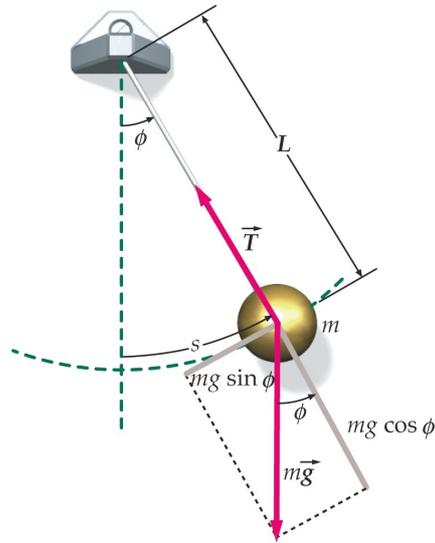
Y la energía potencial asociada es:  $E_p = \frac{1}{2}kx^2$

#### 2.- PÉNDULO

Como vemos en la figura siguiente, las fuerzas que intervienen son la tensión y el peso. El peso se puede descomponer en las dos componentes que se indican. La componente en la dirección del movimiento es la responsable de la aceleración tangencial de la partícula. Dicha componente viene dada por:  $F = -mg\sin\phi$

Para ángulos pequeños, se puede considerar  $\sin\phi \approx \phi$ , con lo que la expresión anterior queda:  $F = -mg\phi$ . Finalmente, si tenemos en cuenta la relación entre el arco ( $s$ ) y el ángulo:  $s = \phi R$  (donde  $R$  es la longitud del péndulo  $L$ ), podemos escribir:

$$F = -\frac{mg}{L}s$$



Vemos que las dos expresiones (muelle y péndulo) son similares, ya que la fuerza es igual a menos una constante multiplicada por el espacio recorrido. Ambas van a ser representadas por lo tanto por una expresión similar, que como veremos en el apdo siguiente es la expresión del movimiento armónico simple.

### MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

En el apartado anterior hemos visto la ecuación de la dinámica del movimiento de un muelle  $F = -kx$ . Si escribimos en esta ecuación la segunda ley de Newton junto con la definición de aceleración obtenemos la ecuación diferencial que rige el movimiento armónico simple:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

se puede demostrar que una solución de esta ecuación es:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi_0)$$

Para demostrar que es solución de la ecuación diferencial derivamos dos veces para obtener la aceleración:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = a \omega \cos(\omega t + \phi_0) \implies a(t) = \frac{dv}{dt} = -A \omega^2 \sin(\omega t + \phi_0) = -\omega^2 x(t)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial las expresiones de  $a(t)$  y  $x(t)$ :

$$-m A \omega^2 \sin(\omega t + \phi_0) = -k A \sin(\omega t + \phi_0)$$

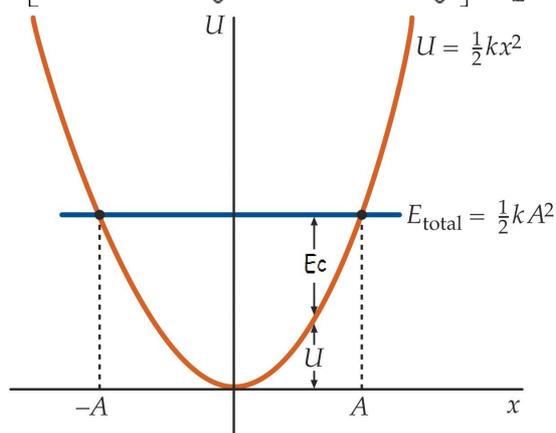
Expresión que simplificada se cumple con tal de que  $k = m \omega^2$ .

En cuanto a la energía, la energía mecánica es suma de la energía cinética y potencial. Teniendo en cuenta las expresiones obtenidas en la demostración anterior tenemos que:

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m [A \omega \cos(\omega t + \phi_0)]^2 + \frac{1}{2} k [A \sin(\omega t + \phi_0)]^2$$

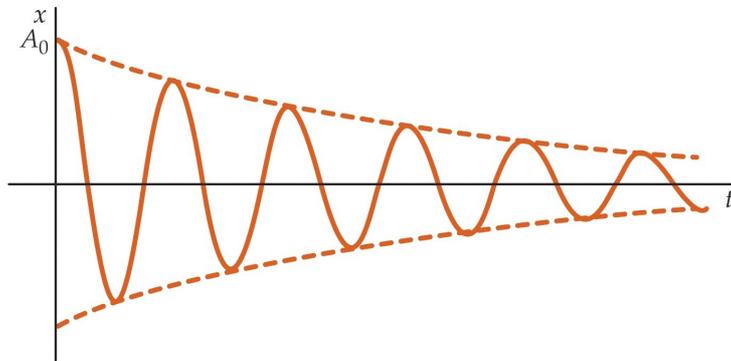
Asociamos los términos teniendo en cuenta que  $k = m \omega^2$ :

$$E_m = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 [\cos^2(\omega t + \phi_0) + \sin^2(\omega t + \phi_0)] = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 = \frac{1}{2} k A^2$$



## OSCILACIONES AMORTIGUADAS:

En todo movimiento oscilante real se disipa energía mecánica debido a algún tipo de rozamiento. Cuando consideramos esta disminución de energía llamamos al oscilador 'amortiguado'. La representación gráfica de la elongación en función del tiempo sería como la de la figura a continuación:



Si añadimos a la fuerza elástica del muelle la fuerza de rozamiento en un fluido  $F_r = -bv$ , la ecuación diferencial que tenemos es:

$$-kx - bv = m \frac{dv}{dt}$$

La solución general a una ecuación diferencial como la arriba indicada es del tipo:

$$x(t) = A_0 e^{-(b/2m)t} \cos(\omega' t + \phi_0) \quad \text{donde } \omega' \text{ viene dada por: } \omega' = \omega(0) \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2m\omega(0)}\right)^2}$$

## OSCILADOR FORZADO.

Puesto que las oscilaciones disminuyen gradualmente con el tiempo, para mantener un sistema oscilando es necesario suministrar energía al sistema. Cuando hacemos esto llamamos al oscilador 'forzado'. Para estudiar matemáticamente el oscilador forzado suponemos que está sujeto a la ley de Hooke, que además está amortiguado por un rozamiento en un fluido, y que está sujeto a una fuerza externa restauradora que varía armónicamente con el tiempo:  $F_{ext} = F_0 \sin \omega' t$ , donde  $\omega'$  es la frecuencia angular de la fuerza, que en principio es distinta de la frecuencia angular natural del oscilador  $\omega$  (si coinciden tenemos el fenómeno de la resonancia, en el que la energía absorbida del oscilador es máxima y llamamos a  $\omega' = \omega = \omega_0$ ). La ecuación diferencial del movimiento es en este caso:

$$-m\omega^2 x - bv + F_0 \sin \omega' t = m \frac{dv}{dt}$$

No vamos a resolver de manera exacta esta ecuación diferencial, pero sí lo haremos cualitativamente. La solución consta de dos partes. Una de ellas es una solución transitoria que desaparece con el tiempo y que no tendremos en cuenta, y otra parte es una solución estacionaria que permanece en el tiempo. La solución estacionaria se puede escribir como:

$$x(t) = A \sin(\omega' t - \delta)$$

Si la frecuencia externa  $\omega'$  es igual a la natural del sistema  $\omega = \omega_0$  entonces la amplitud es muy grande (no entramos en detalles del valor de la amplitud  $A$  ni de la fase  $\delta$ ).

## BIBLIOGRAFÍA

- Tipler, P. A. y Mosca G. 'FÍSICA para la ciencia y la tecnología' (5ª ed), vol. 1 (capítulo 14) Ed. Reverté (Barcelona).