UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA.

DEPARTAMENTO DE FÍSICA APLICADA.

FÍSICA I

PROBLEMAS DE MAGNITUDES Y VECTORES

1. Dados los vectores $\vec{A} = 4\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + \hat{k}$, $\vec{B} = -7\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 8\hat{k}$ y $\vec{C} = -2\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - 6\hat{k}$, calcula:

   a) Ángulo que forma $\vec{S} = \vec{A} + \vec{B}$ con $\vec{R} = \vec{B} - \vec{C}$.

   b) Producto triple $\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right) \vec{C}$. Comprueba que es distinto de $\vec{A}\left(\vec{B} \cdot \vec{C}\right)$.

   c) Comprueba que $\vec{A} \cdot \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \vec{B} \cdot \left(\vec{C} \times \vec{A}\right) = \vec{C} \cdot \left(\vec{A} \times \vec{B}\right)$.

   d) Comprueba que $\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) \neq \left(\vec{A} \times \vec{B}\right) \times \vec{C}$.

   e) Comprueba la igualdad para el producto doblemente vectorial: $\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \vec{B}\left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right)$.

2. Un triángulo tiene de vértices $A(1, 1, 0)$ u, $B(2, 1, -1)$ u y $C(1, 2, 3)$ u. Calcula el área de dicho triángulo mediante cálculo vectorial.

3. Dado el vector $\vec{A} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 5\hat{k}$, calcula sus dos componentes paralela y perpendicular al vector $\vec{B} = -\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 4\hat{k}$.

4. Dados dos vectores $\vec{A} = 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - \hat{k}$ y $\vec{B} = -\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2\hat{k}$, halla el ángulo que forman y la proyección de $\vec{A}$ sobre $\vec{B}$.

5. Sean $A(-1, 0, 1)$, $B(1, 1, 3)$, $C(-2, 1, -1)$ y $D(2, 5, 1)$ cuatro puntos del espacio. Determina:

   a) Ángulo que forman los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$.

   b) Vector unitario perpendicular al vector $\vec{AB}$ que esté contenido en el plano XY.

6. Dados los vectores $\vec{A} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath}$ u, $\vec{B} = \hat{\imath} - 2\hat{k}$ u y $\vec{C} = \hat{\imath} + x\hat{\jmath} - \hat{k}$ u, determina el valor de x para que el volumen del paralelepípedo determinado por dichos vectores sea 7 u^3.

7. Un tetraedro tiene de vértice el origen de coordenadas, siendo las coordenadas de sus otros tres vértices $B(2, 1, 0)$ u, $C(1, 0, -2)$ u y $D(1, 2, -1)$ u. Calcula el volumen de dicho tetraedro (*el volumen de un tetraedro es la sexta parte del volumen del paralelepípedo que lo contiene*).

8. Dados los vectores $\vec{A} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - \hat{k}$ y $\vec{B} = \hat{\imath} - 2\hat{k}$ aplicados en el punto $P(3, 0, -1)$, calcula el momento resultante de dichos vectores respecto al punto $O(1, 2, 3)$, y comprueba que se cumple el Teorema de Varignon (*El momento de la resultante de varios vectores deslizantes es igual a la suma de los momentos de cada uno de los vectores*).

9. Dado el vector $\vec{V} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$ aplicado en el punto $P(1, 1, 1)$, determina el momento de ese vector respecto a un eje que pasa por los puntos $A(2, 2, 4)$ y $B(1, 2, -3)$.

10. La recta de acción del vector deslizante $\vec{V}$, de módulo 7, pasa por los puntos $A(6,0,4)$ y $B(0,12,8)$. Calcula:

a) El vector $\vec{V}$.

b) Momento de $\vec{V}$ respecto al origen de coordenadas O, suponiendo el punto de aplicación en A. Comprueba el resultado si se toma B como punto de aplicación.

c) Momento de $\vec{V}$ respecto al punto $P(1,-1,2)$, suponiendo el punto de aplicación en B. Comprueba el resultado aplicando el método del cambio de centro de momentos.

d) Momento de $\vec{V}$ respecto a la recta que pasa por los puntos $C(3,2,1)$ y $D(1,-2,-3)$.

e) Distancia entre la recta de acción de $\vec{V}$ y el origen O.

11. Calcula el momento de un vector desconocido $\vec{V}$ con respecto a una semirrecta Δ que pasa por el origen de coordenadas y forma ángulos de 60º y 45º con los ejes X y Z respectivamente. Del vector desconocido $\vec{V}$ se saben los siguientes datos: está aplicado en el punto $P(7,2,3)$, se encuentra en el plano XOY, su módulo es 10 y forma un ángulo de 30º con el eje OX.

12. Dado el vector $\vec{r} = 2\cos\omega t\hat{\imath} + 2\sin\omega t\hat{\jmath}$, siendo ω una constante, demuestra que:

a) El vector $\frac{d\vec{r}}{dt}$ es perpendicular al vector $\vec{r}$.

b) El vector $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ está dirigido hacia el origen de coordenadas, y su módulo es proporcional al de $\vec{r}$.

c) El producto vectorial $\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$ es un vector constante.

13. Comprueba la homogeneidad de las siguientes fórmulas:

a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$, donde $T \rightarrow$ periodo, $I \rightarrow$momento de inercia, $d \rightarrow$ distancia.

b) $\frac{F}{S} = p + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2$, donde $p \rightarrow$ presión, $\rho \rightarrow$ densidad, $v \rightarrow$ velocidad.

c) $\nu = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F}{\rho S}}$, donde $\nu \rightarrow$ frecuencia, $S \rightarrow$ sección.

d) $P = \text{Caudal} \cdot \rho g h$, donde $P \rightarrow$ potencia, Caudal$\rightarrow \frac{V}{t}$

14. Dadas las ecuaciones siguientes, calcula la ecuación de dimensiones de las magnitudes que se indican en cada caso:

a) $c = \sqrt{\frac{pk^2}{\rho D}}$, donde $c \rightarrow$ velocidad, $p \rightarrow$ presión, $\rho \rightarrow$ densidad y $D \rightarrow$diámetro. Se pide ecuación dimensional de k.

b) $Ax + By^2 + C = \left(\frac{p-d^2}{m_o}\right)^2$, donde $A \rightarrow$ área, $B \rightarrow$ volumen, $p \rightarrow$ presión y $m_0 \rightarrow$ masa. Se pide ecuación dimensional de x e y.

c) $\sqrt{m_o} = \left(\frac{B}{g}\right)^x (\sin\theta + \frac{W}{VA}\cos\phi)^{2\sin\alpha}$, donde $B \rightarrow$ fuerza, $m_o \rightarrow$ masa, $W \rightarrow$ trabajo y $V \rightarrow$ volumen. Se pide ecuación dimensional de A y además el valor de x.

15. Calcula el valor de x e y para que las siguientes expresiones sean correctas:

a)

$$20I\sin\theta = m\frac{0,3\sin 30^{\circ}(r\cos\theta)^x - (r_n\cos\alpha)^y}{50(r\sin\theta)^3 - (r_{n-1}\sin\alpha)^3}, \tag{1}$$

donde I es un momento de inercia, m es una masa y r distancias.

b)

$$2H = \left(\frac{a^2b^x}{2c^y}\right)\sin\theta, \tag{2}$$

donde H es una altura, b un radio, a una velocidad y c una aceleración

16. Deduce por medio del análisis dimensional las siguientes leyes:

    a) Periodo de oscilación de un péndulo, si $T = f(l, g)$ y $K = 2\pi$.

    b) Ley de Jurin de la capilaridad, si $h = f(\sigma, r, \rho, g)$ siendo h inversamente proporcional a r, y $K = 2\cos\phi$ (σ es la tensión superficial, F/l).

    c) Fuerza gravitatoria entre dos cuerpos, si $F = f(G, m_1, m_2, r)$

17. Un cuerpo de masa m cae libremente desde una altura h por efecto de la gravedad, partiendo del reposo. Halla la relación entre la velocidad de llegada al suelo v, la gravedad g, h y m.

18. Encuentra la relación entre v, a, s y t en un movimiento rectilíneo.

19. Encuentra la velocidad del sonido en un gas c, relacionándola con p(presión), T(temperatura) y ρ(densidad).

RESULTADOS

1. a) $\alpha = 11,5^{\circ}$

    b) $64\hat{\imath} - 160\hat{\jmath} + 192\hat{k} \neq -56\hat{\imath} + 42\hat{\jmath} - 14\hat{k}$

    c) $\vec{A} \cdot \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = -109$

    d) $139\hat{\imath} + 44\hat{\jmath} - 424\hat{k} \neq 259\hat{\imath} - 158\hat{\jmath} - 218\hat{k}$

    e) Se comprueba el resultado del apartado anterior

2. A=1,66 u^2

3. $\vec{A}_{\text{par}} = -0,94\hat{\imath} - 0,94\hat{\jmath} + 3,78\hat{k}$ y $\vec{A}_{\text{per}} = 2,94\hat{\imath} + 1,94\hat{\jmath} + 1,22\hat{k}$

4. $\alpha = 139,8^{\circ}$ y $\vec{\text{Proy}}_{\vec{B}}(\vec{A}) = 1,17\hat{\imath} - 1,17\hat{\jmath} - 2,33\hat{k}$

5. a) $\alpha = 27,3^{\circ}$

    b) $\hat{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}, 0\right)$ y $\hat{u}_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)$

6. $x = 2$ u

7. $V = 7/6$ u^3

8. $\vec{M}_{T(O)} = -2\hat{\imath} - 10\hat{\jmath} + 4\hat{k}$

9. $\vec{M}_{\vec{AB}}(\vec{V}) = 0,22\hat{\imath} + 1,54\hat{k}$

10. a) $\vec{V}_1 = (-3, 6, 2)$ o $\vec{V}_2 = (3, -6, -2)$. Para el resto de apartados tomamos $\vec{V}_1$

    b) $\vec{M}_o(\vec{V}) = -24\hat{\imath} - 24\hat{\jmath} + 36\hat{k}$

    c) $\vec{M}_p(\vec{V}) = -10\hat{\imath} - 16\hat{\jmath} + 33\hat{k}$. Se comprueba fórmula.

    d) $\vec{M}_{\vec{CD}}(\vec{V}) = -3,11\hat{\imath} - 6,22\hat{\jmath} - 6,22\hat{k}$

    e) $d = 7,07$ u

11. $\vec{M}_\Delta(\vec{V}) = -9\hat{i} + 9\hat{j} + 12,6\hat{k}$

12. a) Se comprueba

    b) $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\omega^2\vec{r}$

    c) $\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = 4\omega\hat{k}$

13. a) T

    b) $\mathrm{ML^{-1}T^{-2}}$

    c) $\mathrm{T^{-1}}$

    d) $\mathrm{ML^2T^{-3}}$

14. a) $[k] = \mathrm{L}^{1/2}$

    b) $[x] = \mathrm{L^{-4}T^{-4}}$ e $[y] = \mathrm{L^{-5/2}T^{-2}}$

    c) $[A] = \mathrm{ML^{-1}T^{-2}}$ y $x = 1/2$

15. a) $x = 5$ e $y = 5$

    b) $x = 0$ e $y = 1$

16. a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

    b) $h = \frac{2\sigma\cos\phi}{r\rho g}$

    c) $F = KG\frac{m_1 m_2}{r^2}$

17. $v = K\sqrt{gh}$

18. $s = K_1 vt + K_2 at^2$

19. $c = K\sqrt{\frac{p}{\rho}}$