Modelización Matemática de Sistemas Dinámicos
*Ingeniero en Automática y Electrónica Industrial*
EXAMEN DE FEBRERO 30-1-2008. 10-13h

*Nombre:*
*DNI:*

1. Considere una placa cuadrada de lado $L = 4$, densidad superficial de masa $\sigma = 1$, conductividad térmica $\kappa = 1$ y capacidad calorífica $c = 1$ (en unidades apropiadas). Las ecuaciones diferenciales (aproximadas) que describen la evolución en el tiempo $t$ de la temperatura $T_{i,j}$ en los puntos interiores de la placa $i, j = 1, \ldots, N-1$ (donde $N^2$ denota el número de porciones en que dividimos la placa) son:

$$\dot{T}_{i,j}(t) = \frac{\kappa N^2}{c\sigma L^2}\left(T_{i-1,j}(t) + T_{i+1,j}(t) + T_{i,j-1}(t) + T_{i,j+1}(t) - 4T_{i,j}(t)\right)$$

con condiciones iniciales $T_{i,j}(0) = T_{i,j}^{(0)}$ y ciertas condiciones de contorno en los 4 lados de la placa. Tome el caso de cuatro porciones ($N = 2$). Es decir, sólo un punto interior $T_{i,j} = T_{1,1} = T$, [el punto medio, véase figura 1], condición inicial $T(0) = 0$ y condiciones de contorno en los cuatro lados:

$$T_{0,1}(t) = 0, \qquad T_{1,0}(t) = 0,$$
$$T_{1,2}(t) = 4e^{-2t}u_S(t), \quad T_{2,1}(t) = 4te^{-t}u_S(t-1).$$

Resuelva la ecuación diferencial por dos procedimientos:

*a*) Considerando la condición de contorno como una función a trozos, resolviendo la ecuación diferencial en cada trozo y empalmando la solución imponiendo continuidad. **(1.5p)**

*b*) Por transformada de Fourier. **(2.5p)**

2. Sea el circuito RCL de la Figura 2 con fuerza electromotriz $E(t) = f_p(t)$, donde $f_p(t)$ es la extensión periódica de periodo $T = 2$ de la función $f(t) = |t|$ en el intervalo $(-1, 1)$. Se pide:

*a*) Representa gráficamente la extensión periódica $E(t)$ y calcula los coeficientes $c_n$, $n \in \mathbb{Z}$ de la serie compleja de Fourier de $E(t)$. **(1p)**

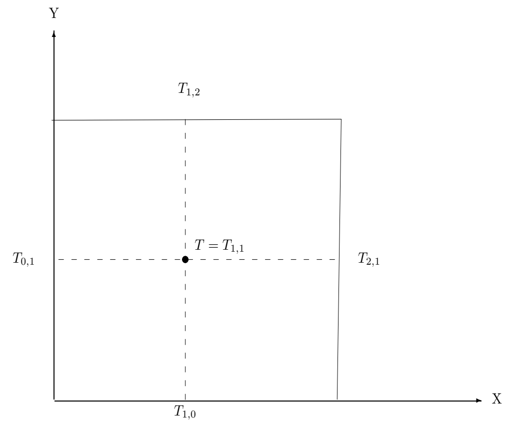


Figura 1: Difusión del calor en una placa

*b*) Calcula la función de transferencia $\hat{H}(\omega)$, considerando como entrada $E(t)$ y como salida la caída de potencial en el condensador $V_C(t)$. Comprueba que se trata de un filtro de Butterworth paso-baja, cuyo espectro de amplitud es:

$$|\hat{H}_n(\omega)| = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}},$$

e identifica los valores de $n$ y $\omega_c$. **(1p)**

*c*) Trunca la serie de Fourier de $E(t)$ y considera sólo los armónicos con $|n| \leq 1$, es decir, considera la fuerza electromotriz aproximada:

$$\tilde{E}(t) = \sum_{n=-1}^{1} c_n e^{i\omega_n t}.$$

Resuelve la ecuación diferencial correspondiente y calcula la intensidad $I(t)$ tomando como condiciones iniciales $I(0) = \dot{I}(0) = 0$. **(2.25p)**

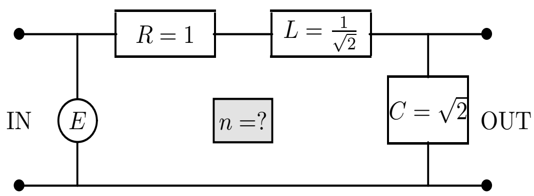


Figura 2: Filtro de Butterworth

3. Resuelve la ecuación en diferencias:

$$x_k + ax_{k-1} + bx_{k-2} = f_k,$$

con condición inicial $x_{-1} = 0 = x_{-2}$, en los siguientes casos:

*a*) $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{4}, f_k = \delta_{k-1}$ **(0.75p)**

*b*) $a = -2, b = 1, f_k = u_k + 2^k u_k$ **(1p)**

¿en qué caso o casos existe resonancia?