



Modelización Matemática de Sistemas Dinámicos
 Ingeniero en Automática y Electrónica Industrial
 EXAMEN DE FEBRERO
 13-2-2007. 16-19h

Apellidos:
 Nombre:
 DNI:

1. Considere un vástago de longitud $L = 1$, densidad lineal de masa $\lambda = 1$, conductividad térmica $\kappa = 1$ y capacidad calorífica $c = 1$ (en unidades apropiadas). Las ecuaciones diferenciales (aproximadas) que describen la evolución en el tiempo t de la temperatura T_k en los puntos interiores del vástago $k = 1, \dots, N - 1$ (donde N denota el número de porciones en que dividimos el vástago) son:

$$\dot{T}_k(t) = \frac{\kappa N^2}{c\lambda L^2} (T_{k-1}(t) - 2T_k(t) + T_{k+1}(t))$$

con condición inicial $T_k(0) = T_k^{(0)}$ y condiciones de contorno $T_0(t) = a(t)$, $T_N(t) = b(t)$. Tome el caso de dos porciones $N = 2$ (sólo un punto interior $k = 1$: el punto medio), condición inicial $T_1(0) = 0$ y condiciones de contorno $T_0(t) = 0, \forall t$ (extremo izquierdo a temperatura cero) y

$$T_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ e^{-8t} & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

(extremo derecho a temperatura variable). Resuelva la ecuación diferencial por dos procedimientos:

- a) Considerando $T_2(t)$ como una función a trozos, resolviendo la ecuación diferencial en cada trozo y empalmado la solución imponiendo continuidad. **(1p)**
- b) Por transformada de Fourier. **(1.5p)**

¿Cuál es la temperatura a largo plazo?. **(0.25p)**
 ¿Cuál es la máxima temperatura que alcanza el punto medio del vástago?. **(0.5p)** ¿En qué instante alcanza dicha temperatura? **(0.25p)**

2. Sea el circuito RCL de la Figura 1 con fuerza electromotriz $E(t) = f_p(t)$, donde $f_p(t)$ es la extensión periódica de periodo $T = 1$ de la función $f(t) = t^2$ en el intervalo $(-1/2, 1/2)$. Se pide:

- a) Representa gráficamente la extensión periódica $E(t)$ y calcula los coeficientes c_n , $n \in \mathbb{Z}$ de la serie compleja de Fourier de $E(t)$. **(1.5p)**
- b) Calcula la función de transferencia H_n , considerando como entrada $E(t)$ y como salida la caída de potencial en la bobina. ¿Se trata de un “filtro paso alta, baja o banda” ? (tómese en este apartado, por ejemplo: $L = R = C = 1$). **(0.75p)**
- c) Trunca la serie de Fourier de $E(t)$ y considera sólo los armónicos con $|n| \leq 1$, es decir, considera la fuerza electromotriz aproximada:

$$\tilde{E}(t) = \sum_{n=-1}^{n=1} c_n e^{i\omega_n t}.$$

Tomando $L = 1$, ¿para qué valores de R y C se produce resonancia con el primer armónico ($n = 1$)?. Para estos valores de L, R, C y $\tilde{E}(t)$, resuelve la ecuación diferencial correspondiente y calcula la intensidad $I(t)$ tomando como condiciones iniciales $I(0) = \dot{I}(0) = 0$. **(2.25p)**

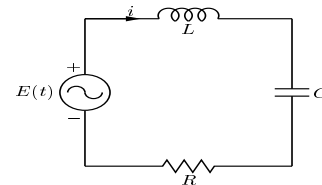


Figura 1: Circuito RCL

3. Resuelve la ecuación en diferencias:

$$x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2} = f_k,$$

con condición inicial $x_{-1} = 0 = x_{-2}$, en los siguientes casos:

- a) $f_k = \delta_k$ (impulso) **(1p)**
- b) $f_k = u_k$ (salto) **(1p)**

¿en qué caso o casos existe resonancia?