Modelización Matemática de Sistemas Dinámicos

Ingeniero en Automática y Electrónica Industrial

Examen de Septiembre

15-9-2006. 10-13h

Apellidos:

Nombre:

DNI:

1. Se considera un rotor con amortiguamiento viscoso, que gira a una velocidad angular $\omega(t)$ y está sometido a un par de torsión (o "momento", en Newton por metro) $M(t)$, modelado por la ecuación:

$$I\frac{d\omega(t)}{dt} + \beta\omega(t) = M(t),$$

donde $I = 50kg.m^2$ es el momento de inercia del rotor y $\beta = 0{,}5N.m.s$ es el coeficiente viscoso de rozamiento con el eje. En el instante inicial ($t = 0$) el rotor está parado. Obtén $\omega(t)$ en cualquier instante de tiempo si el par de torsión se aplica de forma gradual, aumentando linealmente desde cero hasta $400N.m$ durante 8 segundos, y luego deja de actuar, es decir:

$$M(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 50t, & 0 < t \leq 8 \\ 0, & t > 8 \end{cases}$$

Para ello sigue dos procedimientos:

a) Considerando $M(t)$ como una función a trozos, resolviendo la ecuación diferencial en cada trozo y empalmando la solución imponiendo continuidad. **(1p)**

b) Por transformada de Fourier. **(3p)**

2. Sea el circuito de la figura con fuerza electromotriz $E(t) = M_p(t)$, donde $M_p(t)$ es la extensión periódica de periodo $T = 8$ de la función $M(t)$ del ejercicio anterior en el intervalo $(0, 8)$. Se pide:

a) Calcula los coeficientes c_n, $n \in \mathbb{Z}$ de la serie compleja de Fourier de $E(t)$ [usa los resultados del apartado b) del ejercicio anterior]. **(0.5p)**

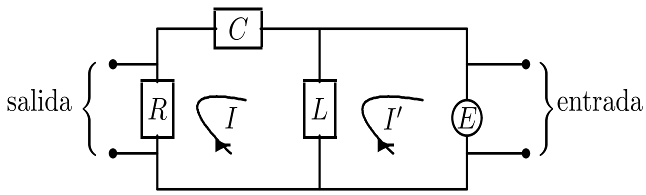
b) Calcula la función de transferencia H_n, considerando como entrada $E(t)$ y como salida la caída de potencial en la resistencia R. ¿Se trata de un "filtro paso alta, baja o banda" ?. **(0.5p)**

c) Trunca la serie de Fourier de $E(t)$ y considera sólo los armónicos con $|n| \leq 1$, es decir, considera la fuerza electromotriz aproximada:

$$\tilde{E}(t) = \sum_{n=-1}^{n=1} c_n e^{i\omega_n t}.$$

Tomando $L = R = C = 1$ y considerando la fuerza electromotriz aproximada $\tilde{E}(t)$, resuelve la ecuación diferencial correspondiente y calcula la intensidad $I(t)$ en la malla de la izquierda tomando como condiciones iniciales $I(0) = \dot{I}(0) = 0$. ¿Existe posibilidad de resonancia para algún valor del trio L, R, C?. **(3p)**

.



3. Resuelve la ecuación en diferencias:

$$x_k + ax_{k-1} = f_k,$$

con condición inicial $x_{-1} = 0$, en los siguientes casos:

a) $f_k = \delta_k$ (impulso) y $a \neq -1$ **(0.5p)**

b) $f_k = u_k$ (salto) y $a \neq -1$ **(0.5p)**

c) $f_k = \delta_k$ y $a = -1$ **(0.5p)**

d) $f_k = u_k$ y $a = -1$ **(0.5p)**

¿en qué caso o casos existe resonancia?