Modelización Matemática de Sistemas Dinámicos
Ingeniero en Automática y Electrónica Industrial
EXAMEN DE JUNIO
30-6-2006. 4.30-7.30h

Ponga: Apellidos, Nombre y DNI en todos los folios.

1. Un circuito RL con resistencia $R = 1\Omega$ e inductancia $L = 1H$ por el que no circula inicialmente corriente, se conecta a una batería que le proporciona un voltaje $f(t) = \sin(t)$ voltios durante π segundos. A continuación se desconecta la batería. Plantea la ecuación diferencial que modela la evolución en el tiempo de la intensidad $I(t)$ que circula por el circuito y resuélvela. Para ello sigue dos procedimientos:

   a) Considerando $f(t)$ como una función a trozos, resolviendo la ecuación diferencial en cada trozo y empalmando la solución imponiendo continuidad. **(1.5p)**

   b) Por transformada de Fourier. **(2.5p)**

   Si consideramos como entrada $f(t)$ y como salida $I(t)$. ¿Cuál es la función de transferencia en el dominio de frecuencias?. Dibuja el espectro de amplitud. ¿Se trata de un filtro paso alta, baja o banda?. **(0.5p)**

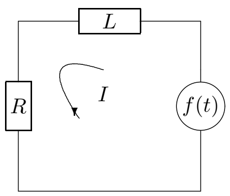
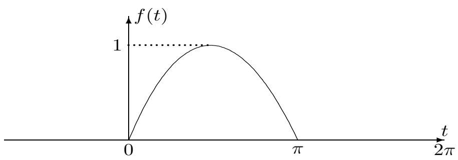


Figura 1: Circuito RL



2. Considere dos tanques de salmuera conectados como en la figura 2. El tanque 1 contiene $x_1(t)$ gramos de sal en $V_1 = 1$ litro de salmuera y el tanque 2 tiene $x_2(t)$ gramos de sal en $V_2 = 2$ litros de salmuera. La salmuera se bombea de un tanque a otro con velocidades $k_{12} = 2\ \ell/\text{min}$ y $k_{21} = 1\ \ell/\text{min}$. Del tanque 2 escapa salmuera a razón de $k_s = 1\ \ell/\text{min}$. Por otro lado, al tanque 1 se incorpora agua salada, a razón de $k_e = 1\ \ell/\text{min}$, con una concentración dependiente del tiempo $c_e(t) = f_p(t)$ gr/ℓ, donde $f_p(t)$ es la extensión periódica de periodo $T = 2\pi$ de la función $f(t)$ de la figura anterior en el intervalo $(0, 2\pi)$ (análogo a un "rectificador de media onda"). Se pide:

   a) Calcula los coeficientes c_n, $n \in \mathbb{Z}$ de la serie compleja de Fourier de $c_e(t)$ [usa los resultados del apartado b) del ejercicio anterior]. **(0.5p)**

   b) Trunca la serie de Fourier de $c_e(t)$ y considera sólo los armónicos con $|n| \leq 1$, es decir, considera la concentración de entrada aproximada:

   $$\tilde{c}_e(t) = \sum_{n=-1}^{n=1} c_n e^{i\omega_n t}.$$

   Resuelve la ecuación diferencial correspondiente y calcula la cantidad de sal en el primer tanque, $x_1(t)$, en cualquier instante de tiempo, tomando como condiciones iniciales $x_1(0) = x_2(0) = 0$ gramos de sal. ¿Existe posibilidad de resonancia con algún armónico?.**(2.5p)**

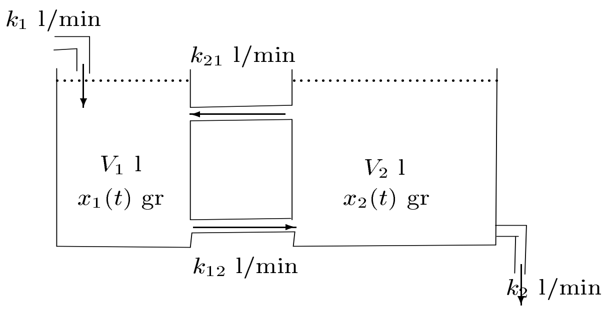


Figura 2: Mezclas en tanques de salmuera

3. Dada la ecuación en diferencias:

   $$x_k - (r_1 + r_2)x_{k-1} + r_1 r_2 x_{k-2} = f_k,$$

   con condiciones iniciales $x_{-1} = x_{-2} = 0$, calcula:

   a) la solución para $r_1 = 1, r_2 = 2$ y $f_k = \delta_k$ [impulso unitario en tiempo discreto]. **(1p)**

   b) la solución para $r_1 = r_2 = 1$ y $f_k = u_k$ [función salto, $u_k = 1, \forall k \geq 0$, en tiempo discreto]. **(1.5p)**

   ¿en qué caso o casos existe resonancia?