



Modelización Matemática de Sistemas Dinámicos
 Ingeniero en Automática y Electrónica Industrial
 EXAMEN DE FEBRERO
 7-2-2006. 9.30-12.30h

Ponga Apellidos, Nombre y DNI en todos los folios

1. Un depósito de $V = 1$ litro de disolución contiene inicialmente $x(0) = 0$ gramos de sal. Mediante un tubo se introduce en el depósito salmuera, a un ritmo de entrada de $r_e = 1$ litro/minuto, cuya concentración de sal $c_e(t)$ (en gramos/litro) varía en función del tiempo como la función “tienda” $f(t)$ de la Figura 2. Al mismo tiempo se vacía el depósito a un ritmo de salida de $r_s = 1$ litro/minuto (véase Figura 1). Suponiendo que la mezcla del depósito se agita constantemente, plantea la ecuación diferencial que modela la evolución en el tiempo de la cantidad de sal $x(t)$ en el depósito y resuélvela. Para ello sigue dos procedimientos:

- Considerando $f(t)$ como una función a trozos, resolviendo la ecuación diferencial en cada trozo y empalmado la solución imponiendo continuidad. **(2p)**
- Por transformada de Fourier. **(2p)**

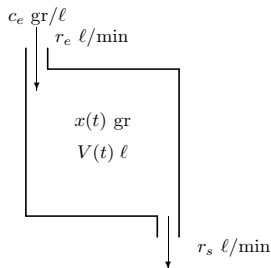


Figura 1: Renovación de un líquido

2. Sea el circuito RCL de la Figura 3 con fuerza electromotriz $E(t) = f_p(t)$, donde $f_p(t)$ es la extensión periódica de periodo $T = 2\pi$ de la función “tienda” $f(t)$ de la Figura 2 en el intervalo $(0, 2\pi)$. Se pide:

- Calcula los coeficientes c_n , $n \in \mathbb{Z}$ de la serie de Fourier de $E(t)$ en forma compleja [usa los resultados del apartado b) del ejercicio anterior]. **(0.5p)**

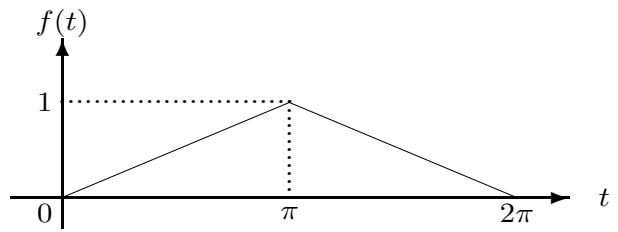


Figura 2: Función tienda

- Calcula la función de transferencia H_n , considerando como entrada $E(t)$ y como salida la caída de potencial en la resistencia. ¿Se trata de un filtro paso alta, baja o banda? Razone la respuesta. (tómese en este apartado, por ejemplo: $L = R = C = 1$). **(0.75p)**
- Trunca la serie de Fourier de $E(t)$ y considera sólo los armónicos con $|n| \leq 1$, es decir, considera la fuerza electromotriz aproximada:

$$\tilde{E}(t) = \sum_{n=-1}^{n=1} c_n e^{i\omega_n t}.$$

Tomando $L = 1$, ¿para qué valores de R y C se produce resonancia con el primer armónico ($n = 1$)?. Para estos valores de L, R, C y $\tilde{E}(t)$, resuelve la ecuación diferencial correspondiente y calcula la intensidad $I(t)$ tomando como condiciones iniciales $I(0) = \dot{I}(0) = 0$. **(1.75p)**

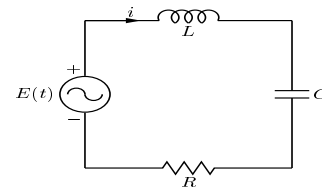


Figura 3: Circuito RCL

3. Dada la ecuación en diferencias:

$$x_k - 2 \sin(\theta)x_{k-1} + x_{k-2} = u_k,$$

[u_k es la función salto ($u_k = 1, \forall k \geq 0$) en tiempo discreto], con condiciones iniciales $x_{-1} = x_{-2} = 0$, calcula:

- la solución para $\theta = \pi/6$. **(1.5p)**
- la solución para $\theta = \pi/2$. **(1.5p)**

¿existe resonancia en algún caso?