Ecuaciones en Derivadas Parciales. Animaciones

■ Cuerda vibrante

La ecuación que gobierna las oscilaciones verticales de pequeña amplitud de una cuerda vibrante de longitud L, densidad ρ y tensión τ, sujeta por ambos extremos es:

$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$ con condiciones iniciales $y(x, 0) = y_0(x)$, $\dot{y}(x, 0) = \dot{y}_0(x)$ y de contorno $y(0, t) = y(L, t) = \dot{y}(0, t) = \dot{y}(L, t) = 0$

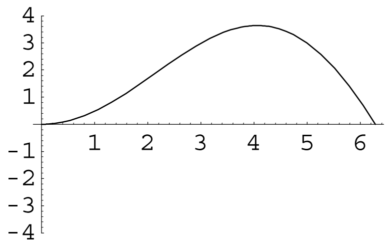
donde $v = \sqrt{\frac{\rho}{\tau}}$ es la velocidad de fase.

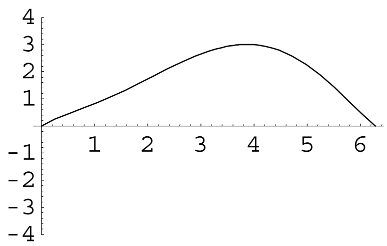
Tomemos por ejemplo *v=1, L=2π* y las condiciones iniciales *y(x,0)=x sen(x/2)*, $\dot{y}(x, 0) = 0$ (velocidad inicial nula). La solución numérica de la ecuación de ondas entre t=0 y t=13 segundos viene dada por:

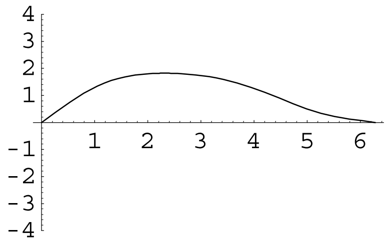
```
In[1]:= cuerda = NDSolve[{D[y[x, t], t, t] == D[y[x, t], x, x],
            y[x, 0] == x Sin[x / 2], Derivative[0, 1][y][x, 0] == 0,
            y[0, t] == 0, y[2 π, t] == 0, Derivative[0, 1][y][0, t] == 0,
            Derivative[0, 1][y][2 π, t] == 0}, y, {x, 0, 2 π}, {t, 0, 13}]

Out[1]= {{y → InterpolatingFunction[{{0., 6.28319}, {0., 13.}}, <>]}}
```

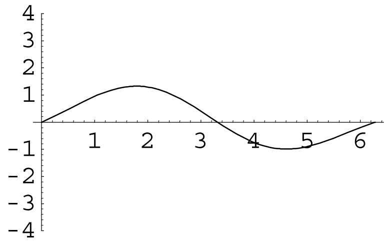
Tomando "instantáneas" cada segundo tenemos la "película":

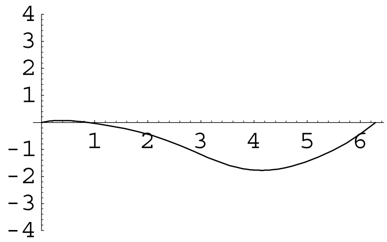
```
In[2]:= Table[ Plot[Evaluate[y[x, t]] /. cuerda,
            {x, 0, 2 π}, PlotRange -> {-4, 4}], {t, 0, 13, 1}];
```

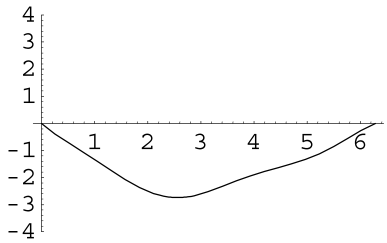


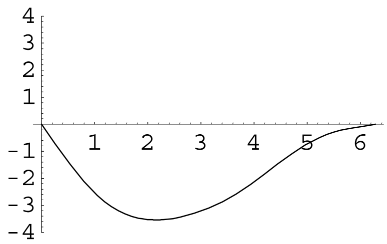


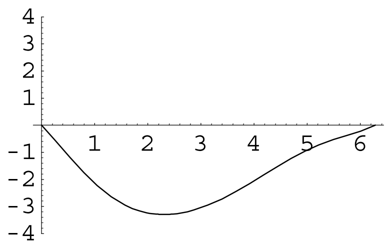

4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
1 2 3 4 5 6

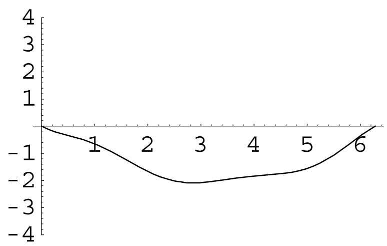

4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
1 2 3 4 5 6

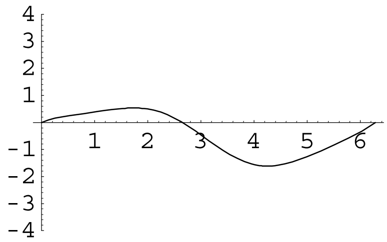

4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
1 2 3 4 5 6

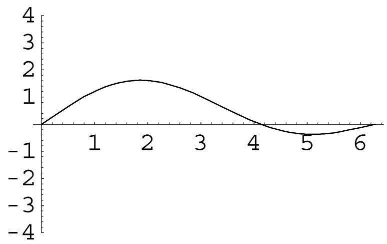

4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
1 2 3 4 5 6

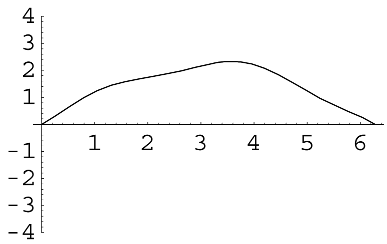

4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
1 2 3 4 5 6

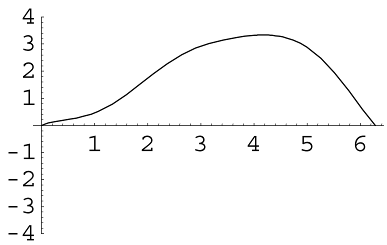

4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
1 2 3 4 5 6

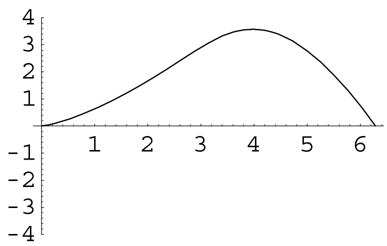

4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
1 2 3 4 5 6





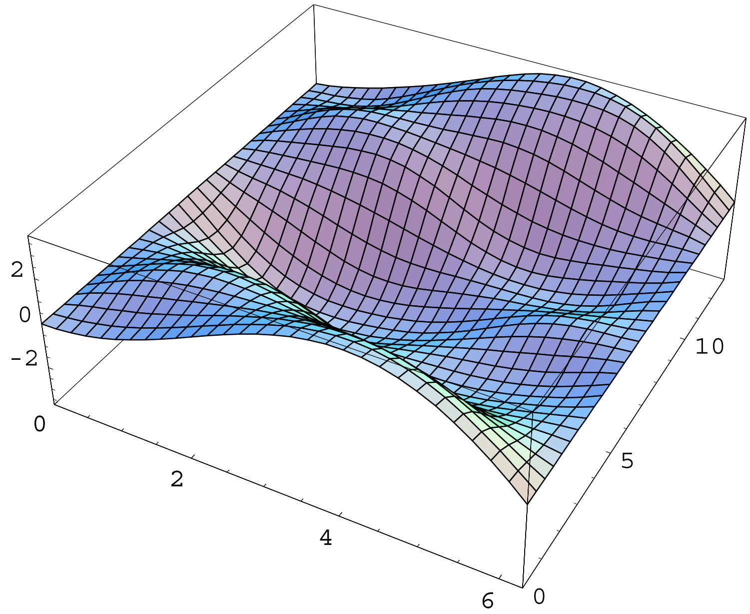






También podemos representar la evolución de la cuerda como un gráfico tridimensional {x,t,y}

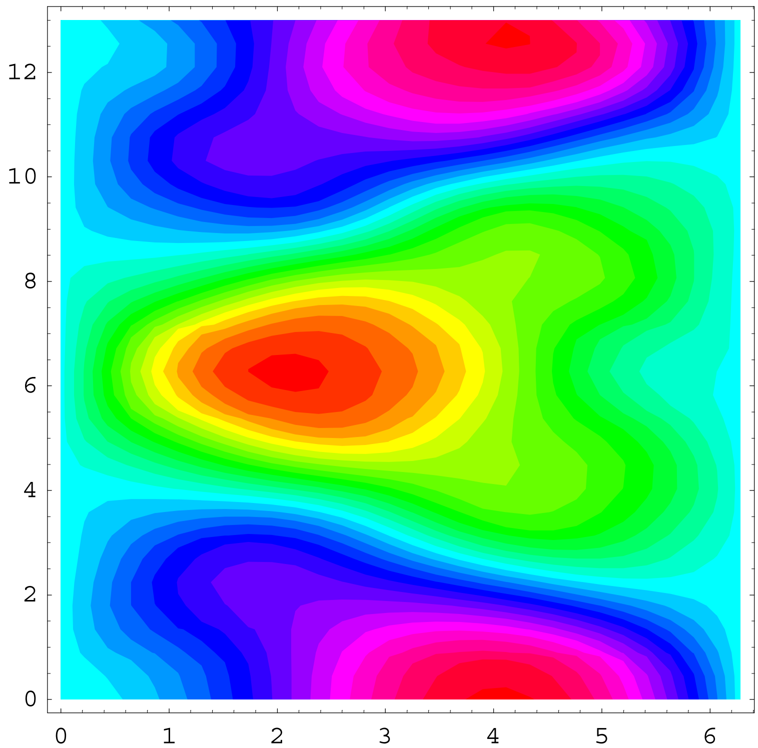
```
In[3]:= Plot3D[Evaluate[y[x, t] /. First[cuerda]],
         {x, 0, 2 π}, {t, 0, 13}, PlotPoints → 30]
```




```
Out[3]= - SurfaceGraphics -
```

o como un gráfico de curvas de nivel:

```
In[4]:= ContourPlot[Evaluate[y[x, t] /. First[cuerda]],
         {x, 0, 2 Pi}, {t, 0, 13}, PlotPoints → 30,
        Contours → 30, ContourLines → False, ColorFunction -> Hue]
```




```
Out[4]= - ContourGraphics -
```

donde las zonas más rojas se corresponden con puntos de mayor amplitud y las azules con puntos de menor amplitud.

Ejercicio

Repita los pasos anteriores para una cuerda de longitud *L=2*, con perfil inicial $y(x, 0) = e^{-x}\,\mathrm{sen}(\pi x/2)$ y velocidad inicial nula.

■ Difusión del calor en un vástago

La ecuación que gobierna la distribución en el tiempo de la temperatura *T(x,t)* de un vástago de longitud *L*, conductividad térmica κ, capacidad calorífica *C* y densidad ρ es:

$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$ con condiciones iniciales: $T(x, 0) = T_0(x)$, y de contorno:

1) $T(0, t) = T_1(t)$, $T(L, t) = T_2(t)$ para extremos en contacto con termostatos a temperaturas T_1 y T_2, y

2) $\partial_x T(0, t) = \partial_x T(L, t) = 0$ para extremos aislados.

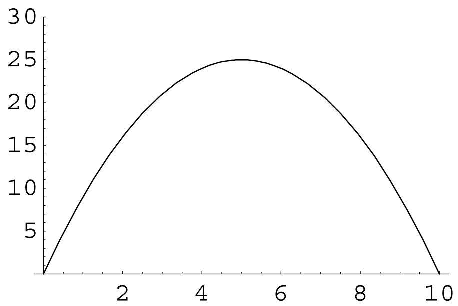
donde $a = \sqrt{\frac{\kappa}{C\rho}}$.

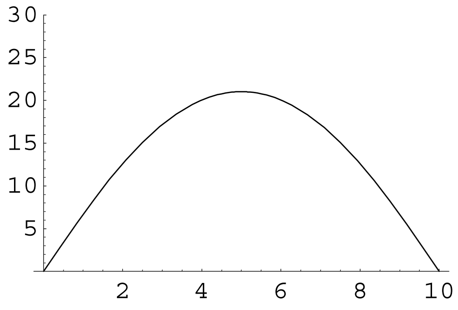
Tomemos por ejemplo *a=1, L=10* y las condiciones iniciales *T(x,0)=-x(x-10)* , $T_1 = T_2 = 0$. La solución numérica de la ecuación de difusión entre t=0 y t=21 segundos viene dada por:

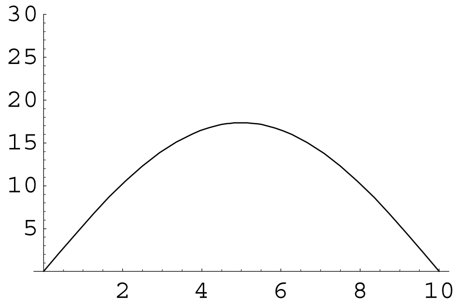
```
In[5]:= temp = NDSolve[{D[T[x, t], t] == D[T[x, t], x, x], T[x, 0] == -x (x - 10),
          T[0, t] == 0, T[10, t] == 0}, T, {x, 0, 10}, {t, 0, 21}]

Out[5]= {{T → InterpolatingFunction[{{0., 10.}, {0., 21.}}, <>]}}
```

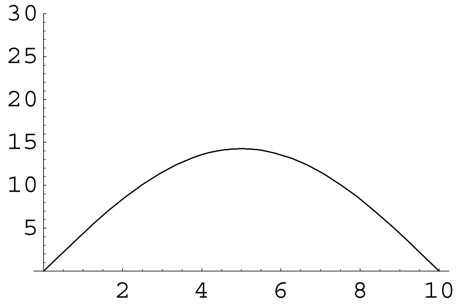
Para ver cómo varía la distribución de temperaturas en el tiempo podemos representar varias en una tabla

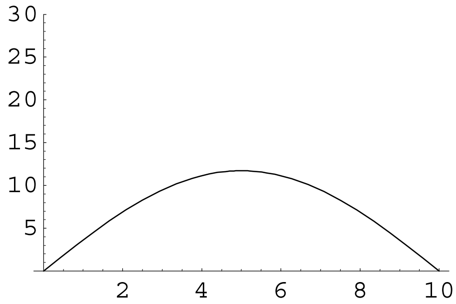
```
In[6]:= Table[ Plot[Evaluate[T[x, t]] /. temp,
          {x, 0, 10}, PlotRange -> {0, 30}], {t, 0, 21, 2}];
```

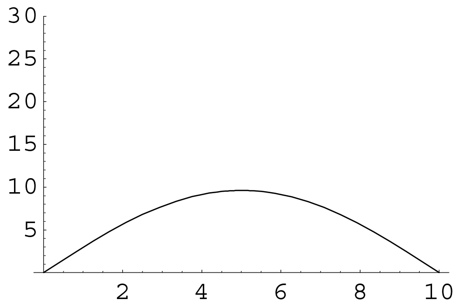


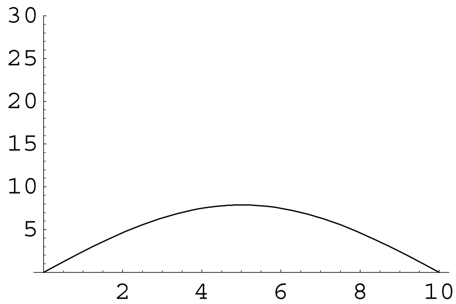


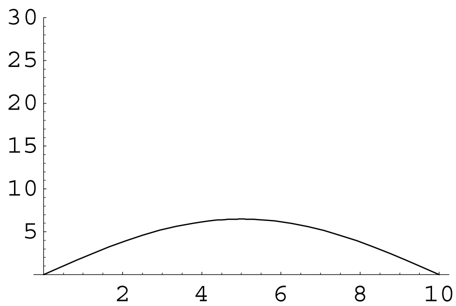

30
25
20
15
10
5
2
4
6
8
10

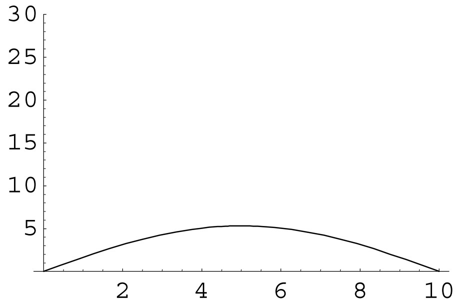

30
25
20
15
10
5
2
4
6
8
10

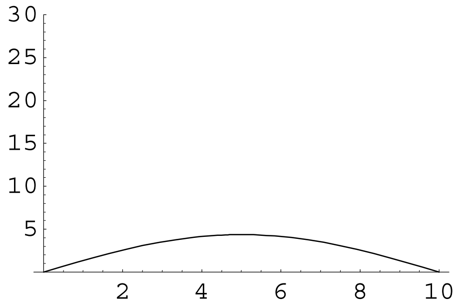

30
25
20
15
10
5
2
4
6
8
10

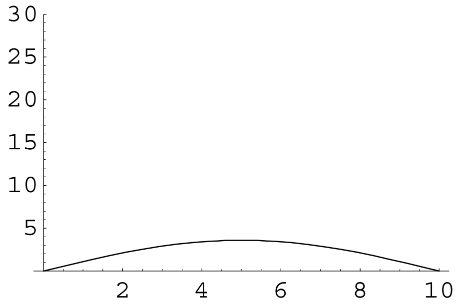

30
25
20
15
10
5
2
4
6
8
10


30
25
20
15
10
5
2
4
6
8
10


30
25
20
15
10
5
2
4
6
8
10

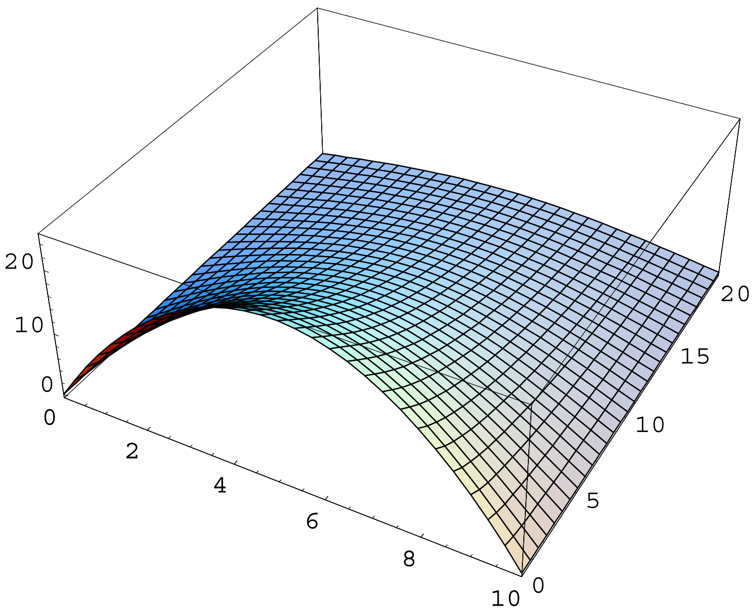






o bien en un gráfico bidimensional

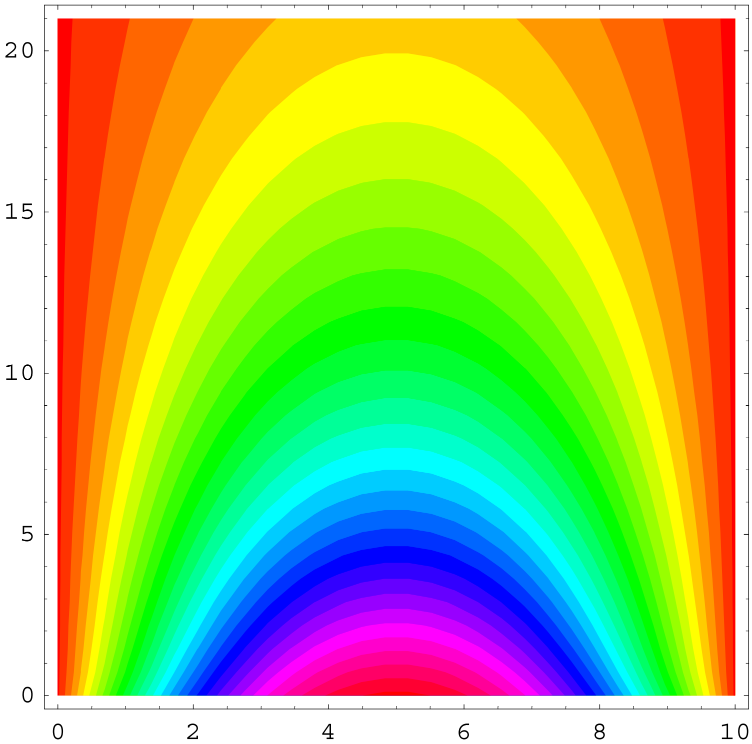
In[7]:=
```
Plot3D[Evaluate[T[x, t] /. First[temp]],
  {x, 0, 10}, {t, 0, 21}, PlotPoints → 30]
```



Out[7]= `- SurfaceGraphics -`

o mediante curvas de nivel

In[8]:=
```
ContourPlot[Evaluate[T[x, t] /. First[temp]],
  {x, 0, 10}, {t, 0, 21}, PlotPoints → 30,
  Contours → 30, ContourLines → False, ColorFunction -> Hue]
```



Out[8]= - ContourGraphics -

donde las zonas rojas (extremos del vástago) indican baja temperatura y las azules y violetas (centro del vástago) indican alta temperatura. De cualquiera de las tres formas vemos que la temperatura tiende paulatinamente a cero en todos los puntos del vástago.

Ejercicio

Repita el ejercicio anterior para un vástago de longitud $L=20$, en contacto con dos termostatos a temperaturas $T_1 = 0$, $T_2 = 8$ y condición inicial $T(x, 0) = x^3/1000$