Sucesiones y series con *Mathematica*

■ Resumen de comandos

SUCESIONES Y SERIES NUMÉRICAS

Limit[a_i, $i \to \infty$] calcula el límite de la sucesión a_i cuando i tiende a infinito

Sum[a_i, {i, imin,imax,paso}]= $\sum_{i=\text{imin}}^{\text{imax}} a_i$ calcula la suma de la serie (el **paso** es opcional e igual a 1 por defecto)

SERIES DE POTENCIAS

Series[*f*, {*x*, x_0, *n*}] genera una serie de potencias (desarrollo de Taylor) para la función f alrededor del punto $x = x_0$ hasta orden $(x - x_0)^n$.

Normal[Series[*f*, {*x*, x_0, *n*}]] ofrece el polinomio de Taylor de grado n.

Series[*f*,{*x*, x_0, n_x},{*y*, y_0, n_y}] para funciones de varias variables.

SeriesCoefficient[*serie*, *n*] busca el coeficiente n-ésimo de la serie de potencias.

InverseSeries[*s*, *x*] coge la serie *s* generada por **Series**, y da una serie para la inversa de la función representada por *s*.

SeriesData[*x*, x_0, {a_0, a_1, … }, *nmin*, *nmax*, *den*] construye una serie de potencias en la variable *x* alrededor del punto x_0. Los a_i son los coeficientes en la serie de potencias. Las potencias de $(x-x_0)$ que aparecen son *nmin*/*den*, (*nmin*+1)/*den*, … , *nmax*/*den*.

SERIES DE FOURIER

<<Calculus`FourierTransform` paquete a cargar

FourierTrigSeries[f[t], t, k] calcula el desarrollo en serie trigonométrico de orden k de una función periódica en el intervalo [-1/2,1/2]

FourierCosCoefficient[f[t],t,n] calcula el n-ésimo c_n coeficiente en el desarrollo en serie de cosenos

FourierSinCoefficient[f[t],t,n] calcula el n-ésimo d_n coeficiente en el desarrollo en serie de senos

NFourierTrigSeries[f[t], t, k] calcula el desarrollo en serie trigonométrico de orden k de una función periódica en el intervalo [-1/2,1/2] numéricamente

NFourierCosCoefficient[f[t],t,n] calcula el n-ésimo c_n coeficiente en el desarrollo en serie de cosenos numéricamente

NFourierSinCoefficient[f[t],t,n] calcula el n-ésimo d_n coeficiente en el desarrollo en serie de senos numéricamente

Recordemos que el desarrollo de Fourier de una función en el intervalo (0,1) y en un intervalo arbitrario (a,b) es

{0, 1}	$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{k} c_n \cos(2\pi n t) + d_n \sin(2\pi n t)$
$\{a, b\}$	$f(t) = (\mid b \mid)^{(1+a)/2} (c_0 + \sum_{n=1}^{k} c_n \cos(2\pi b n t) + d_n \sin(2\pi b n t))$

donde:

{0, 1}	$c_0 = \int_{-1/2}^{1/2} f(t)\, dt$	$c_n = 2\int_{-1/2}^{1/2} f(t)\cos(2\pi n t)\, dt$
$\{a, b\}$	$(\mid b \mid)^{(1-a)/2} \int_{-1/(2\mid b\mid)}^{1/(2\mid b\mid)} f(t)\, dt$	$2(\mid b \mid)^{(1-a)/2} \int_{-1/(2\mid b\mid)}^{1/(2\mid b\mid)} f(t)\cos(2\pi b n t)\, dt$

y

{0, 1}	$d_n = 2\int_{-1/2}^{1/2} f(t)\sin(2\pi n t)\, dt$
$\{a, b\}$	$2(\mid b \mid)^{(1-a)/2} \int_{-1/(2\mid b\mid)}^{1/(2\mid b\mid)} f(t)\sin(2\pi b n t)\, dt$

Si no se especifica nada, *Mathematica* entiende que el intervalo que se repite es el [-1/2,1/2]. Para modificar el periodo *T=b-a* y el intervalo *[a,b]* a repetir, introduciremos la opción:

FourierParameters→{a/(b-a),b/(b-a)}

■ Cálculo de límites, sumas parciales y series numéricas

Podemos hacer límites de sucesiones como:

In[1]:= $\text{Limit}\left[\left(\frac{2n+z}{2n-z}\right)^n, n \to \infty\right]$

Out[1]= e^z

o límites laterales de funciones como:

In[2]:= $\text{Limit}\left[\frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}, x \to 3, \text{Direction} \to 1\right]$

Out[2]= -1

In[3]:= $\text{Limit}\left[\frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}, x \to 3, \text{Direction} \to -1\right]$

Out[3]= 1

Para sumar números que vienen dados por una cierta sucesión, como por ejemplo calcular la suma $\sum_{i=1}^{10} i^2$, *Mathematica* dispone del comando Sum, y el modo de utilizarlo es el siguiente. Por ejemplo, para sumar los cuadrados de los primeros 10 números naturales $\sum_{i=1}^{10} i^2$ escribimos:

```
In[4]:= Sum[i^2, {i, 1, 10}]
Out[4]= 385
```

También se pueden hacer las sumas n-ésimas, así como la suma de series numéricas, es decir expresiones como $\sum_{i=1}^{n} i^2$, y $\sum_{i=1}^{\infty} (i)^{-2}$. Para ello debemos escribir, respectivamente,:

```
In[5]:= Sum[i^2, {i, 1, n}]
```

Out[5]= $\frac{1}{6} n (1+n) (1+2n)$

```
In[6]:= Sum[i^(-2), {i, 1, Infinity}]
```

Out[6]= $\frac{\pi^2}{6}$

Ejercicio

1) Calcula las siguientes sumas y productos:

$$\sum_{i=1}^{n} 2^i \quad ; \quad \sum_{i=1}^{10} (2+i)^i \quad ; \quad \sum_{i=0}^{25} \frac{(x+i)^i}{x+i} \quad ; \quad \prod_{i=1}^{10} (2+i)^i \quad ; \quad \prod_{i=1}^{n} (2+i)^i$$

2) Calcula las siguientes series numéricas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad ; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$$

■ Series de potencias

Para obtener el desarrollo en serie de potencias de orden n de una función f(x) alrededor del punto x=a, disponemos de la sentencia : Series[f(x),{x,a,n}] , que nos proporciona la fórmula de Taylor de orden n de la función f(x) en el punto x=a. Para obtener el Polinomio de Taylor de grado n de la función f(x) en el punto x=a: Normal[Series[f(x),{x,a,n}]]. Por ejemplo:

```
In[7]:= sen0serie7 = Series[Sin[x], {x, 0, 7}]
```

Out[7]= $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + O[x]^8$

ofrece el desarrollo de orden 7 de la función seno en torno a x=0. Para obtener el polinomio de Taylor escribimos:

In[8]:= `sen0poli7 = Normal[sen0serie7]`

Out[8]= $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$

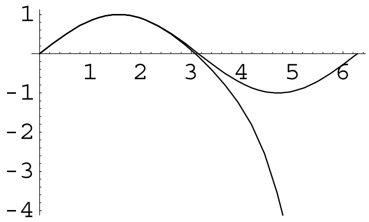
El coeficiente del término de grado 5 se obtiene

In[9]:= `SeriesCoefficient[sen0serie7, 5]`

Out[9]= $\frac{1}{120}$

Una representación gráfica conjunta de la función seno y de su desarrollo de orden 7 en torno a x=0

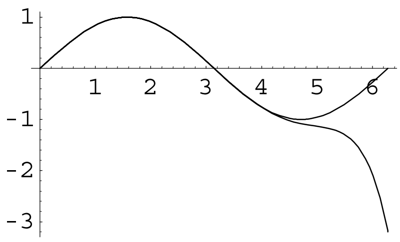
In[10]:= `Plot[{Sin[x], sen0poli7}, {x, 0, 2 Pi}]`



Out[10]= - Graphics -

nos indica que la aproximación es buena cerca de x=0, pero que ambas gráficas empiezan a divergir paulatinamente conforme nos alejamos de dicho punto. En particular, la aproximación polinómica de grado 7 parece ser bastante mala para puntos x>3. Si queremos un radio de "solapamiento" mayor, necesitamos añadir más términos al desarrollo. Por ejemplo:

In[11]:=
```
sen0serie12 = Normal[Series[Sin[x], {x, 0, 12}]];
Plot[{Sin[x], sen0serie12}, {x, 0, 2 Pi}]
```



Out[12]= - Graphics -

Para obtener la serie inversa de otra dada se utiliza el comando **InverseSeries**. Por ejemplo, dado el desarrollo en serie del seno

In[13]:= `s = Series[Sin[x], {x, 0, 9}]`

Out[13]= $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} + O[x]^{10}$

Obtenemos el desarrollo en serie del arcoseno mediante:

In[14]:= `is = InverseSeries[s]`

Out[14]= $x + \frac{x^3}{6} + \frac{3\,x^5}{40} + \frac{5\,x^7}{112} + \frac{35\,x^9}{1152} + O[x]^{10}$

En efecto:

In[15]:=
```
Series[ArcSin[x], {x, 0, 9}]
```

Out[15]= $x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \frac{35x^9}{1152} + O[x]^{10}$

nos ofrece la misma expersión. Podemos también escribir funciones asociadas a una serie con coeficientes predeterminados:

In[16]:=
```
SeriesData[x, 0, {1, -1/2, 1/3, -1/4, 1/5, -1/6, 1/7}, 1, 8, 1]
```

Out[16]= $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} + O[x]^8$

Ejercicio

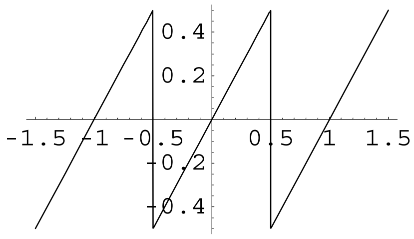
Obtener el desarrollo en serie de orden 3, 6 y 9 de : a) y = e^x en torno a x = 0, y b) y = arctan (x) en torno a x = 0.

Superponga la gráfica de la función a la de su desarrollo en serie de potencias en un cierto intervalo e identifique de forma aproximada los puntos a partir de los cuales ambas graficas difieren cualitativamente.

■ Series de Fourier

Para funciones *f(t)* periódicas de periodo 1, es decir, que cumplen *f(t)=f(t+1)*, como la función "diente de sierra" o "mantisa":

In[17]:=
```
mantisa = Plot[t - Round[t], {t, -1.5, 1.5}]
```



Out[17]= - Graphics -

existe la posibilidad de aproximarlas por una serie trigonométrica
$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{k} c_n \cos(2\pi n t) + d_n \sin(2\pi n t)$. Para ello disponemos del paquete:

In[18]:=
```
<< Calculus`FourierTransform`
```

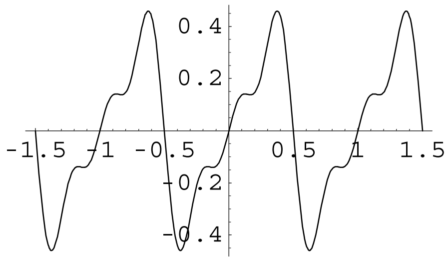
y del comando:

In[19]:=
```
FourierTrigSeries[t, t, 3]
```

Out[19]= $\frac{\mathrm{Sin}[2\pi t]}{\pi} - \frac{\mathrm{Sin}[4\pi t]}{2\pi} + \frac{\mathrm{Sin}[6\pi t]}{3\pi}$

que nos da la serie con k=3 términos. Representemos gráficamente dicha serie

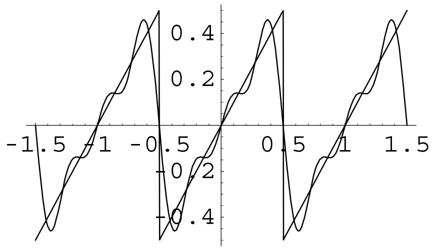
In[20]:= **`Plot[%, {t, -1.5, 1.5}]`**



Out[20]= `- Graphics -`

y superpongámosla a la función

In[21]:= **`Show[mantisa, %]`**



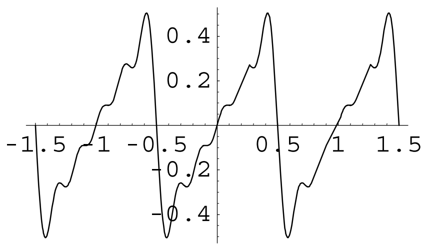
Out[21]= `- Graphics -`

Para conseguir un mejor ajuste debemos aumentar el número de términos, por ejemplo, de 3 a 5 términos:

In[22]:= **`FourierTrigSeries[t, t, 5]`**

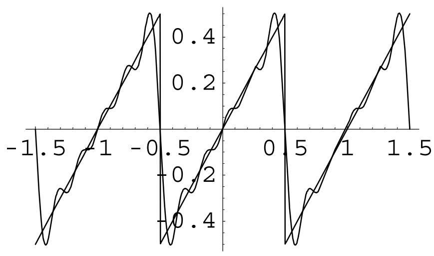
Out[22]= $\frac{\mathrm{Sin}[2\,\pi\,t]}{\pi}-\frac{\mathrm{Sin}[4\,\pi\,t]}{2\,\pi}+\frac{\mathrm{Sin}[6\,\pi\,t]}{3\,\pi}-\frac{\mathrm{Sin}[8\,\pi\,t]}{4\,\pi}+\frac{\mathrm{Sin}[10\,\pi\,t]}{5\,\pi}$

In[23]:= **`Plot[%, {t, -1.5, 1.5}]`**



Out[23]= `- Graphics -`

In[24]:= **`Show[mantisa, %]`**



Out[24]= `- Graphics -`

Observe que obtenemos un mejor ajuste al aumentar el número de términos. Para calcular el coeficiente de Fourier correspondiente al modo n-ésimo escribiremos:

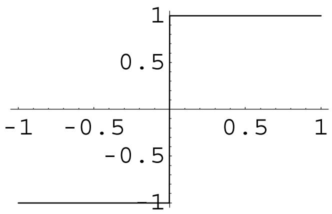
In[25]:=
```
FourierSinCoefficient[t, t, n]
```

Out[25]= $\dfrac{-n\,\pi\,\mathrm{Cos}[n\,\pi] + \mathrm{Sin}[n\,\pi]}{n^2\,\pi^2}$

que tiene un comportamiento del tipo 1/n, típico de funciones periódicas con discontinuidades de salto finito.

Consideremos otras funciones definidas a trozos como la función salto de Heaviside:

In[26]:=
```
salto[t_] := If[t ≤ 0, -1, 1]
Plot[salto[t], {t, -1, 1}]
```



Out[27]= - Graphics -

Si repetimos la gráfica de esta función a intervalos consecutivos (es decir, si construimos una función periódica con periodo 2=1-(-1) que salta de -1 a 1 en los pares y de 1 a -1 en los impares), entonces sus aproximaciones trigonométricas de orden 3,5 y 7 son:

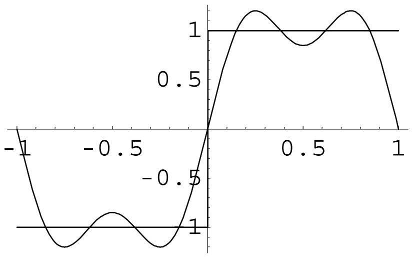
In[28]:=
```
fsalto = Table[FourierTrigSeries[salto[t], t,
   n, FourierParameters → {-1 / 2, 1 / 2}], {n, 3, 7, 2}]
```

```
General::spell1 : Possible spelling error: new symbol
   name "fsalto" is similar to existing symbol "salto".
```

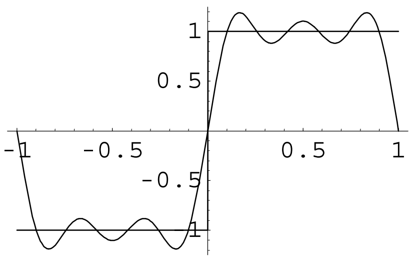
Out[28]= $\left\{\dfrac{\frac{4\,2^{1/4}\,\mathrm{Sin}[\pi\,t]}{\pi}+\frac{4\,2^{1/4}\,\mathrm{Sin}[3\,\pi\,t]}{3\,\pi}}{2^{1/4}},\ \dfrac{\frac{4\,2^{1/4}\,\mathrm{Sin}[\pi\,t]}{\pi}+\frac{4\,2^{1/4}\,\mathrm{Sin}[3\,\pi\,t]}{3\,\pi}+\frac{4\,2^{1/4}\,\mathrm{Sin}[5\,\pi\,t]}{5\,\pi}}{2^{1/4}},\ \dfrac{\frac{4\,2^{1/4}\,\mathrm{Sin}[\pi\,t]}{\pi}+\frac{4\,2^{1/4}\,\mathrm{Sin}[3\,\pi\,t]}{3\,\pi}+\frac{4\,2^{1/4}\,\mathrm{Sin}[5\,\pi\,t]}{5\,\pi}+\frac{4\,2^{1/4}\,\mathrm{Sin}[7\,\pi\,t]}{7\,\pi}}{2^{1/4}}\right\}$

Nótese que la opción **FourierParameters→{-1/2,1/2}** define una serie trigonométrica de periodo 2 en el intervalo [-1,1]; en general, para la serie trigonométrica de periodo *T=b-a* en el intervalo *[a,b]* escribiríamos: **FourierParameters→{a/(b-a),b/(b-a)}.** Si se omite esta opción, *Mathematica* entiende por defecto que se trata de **FourierParameters→{-1,1}.** Superpongamos la gráfica de la función salto y de sus desarrollos de Fourier de orden 3,5 y 7:

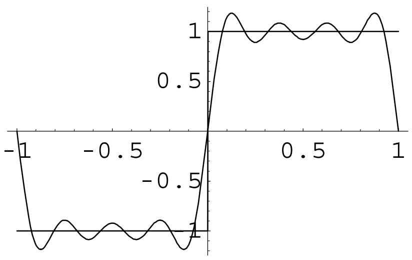
In[29]:=
```
Plot[{salto[t], fsalto[[1]]}, {t, -1, 1}]
Plot[{salto[t], fsalto[[2]]}, {t, -1, 1}]
Plot[{salto[t], fsalto[[3]]}, {t, -1, 1}]
```



Out[29]= - Graphics -



Out[30]= - Graphics -



Out[31]= - Graphics -

Vemos que el desarrollo se ajusta mejor (en media) a la función salto cuanto mayor es el orden.

Ejercicio

Obtener el desarrollo en serie de orden 3, 6 y 9 de : f (t) = 0 si $t \in [-\pi, 0[$, f (t) = sen (t) si $t \in [0, \pi]$.

Superponga la gráfica de la
función a la de su desarrollo en serie de Fourier en el intervalo $[-\pi, \pi]$.