Ingeniero Industrial
Curso 2009/10
Transformadas Integrales y Ecuaciones en Derivadas Parciales
28 de junio de 2010

Indicaciones

- Deben responderse **todas** las preguntas de la parte de teoría y cuestiones. De los cuatro problemas propuestos deben **elegirse tres**.
- La duración del examen es de **3.5 horas**.
- Las fechas de publicación de las notas y de revisión se anunciarán en el tablón de anuncios del Departamento de Matemática Aplicada y Estadística en la planta baja del Antiguo Hospital de Marina.

Teoría y cuestiones

1. Dada la ecuación del telégrafo sobre el segmento unidad con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas:

$$\left.\begin{array}{ll} y_{tt}(t,x) = c^2 y_{xx}(t,x) - \beta y_t(t,x), & t>0,\ 0<x<1 \\ y(t,0) = y(t,1) = 0 & t>0 \end{array}\right\} \qquad (\clubsuit)$$

donde $c, \beta > 0$ son constantes positivas, se define la energía asociada mediante la expresión

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 y_t^2(t,x)\,dx + \frac{c^2}{2}\int_0^1 y_x^2(t,x)\,dx,$$

suma de la energía cinética y de la energía potencial elástica.

(a) **(0.5 Ptos.)** Demuestra que el valor de la energía decrece a lo largo del tiempo, es decir, que $\mathcal{E}'(t) \leq 0$.

(b) **(0.5 Ptos.)** Comprueba que, si $y(t,x) = \phi(t)\,\mathrm{sen}(\pi x)$ es solución de ($\clubsuit$), entonces ϕ debe ser solución de la ecuación diferencial

$$\phi''(t) + \beta\phi'(t) + c^2\pi^2\phi(t) = 0$$

2. Dada la función de Bessel

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

definida sobre el intervalo $[-1,1]$, indica, justificando adecuadamente la respuesta, si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas:

(a) **(0.5 Ptos.)** Para cada $n \geq 1$, $\displaystyle\int_{-1}^1 J_0(x)\,\mathrm{sen}\,(n\pi x)\,dx = 0$

(b) **(0.5 Ptos.)** $\displaystyle\int_0^1 J_0(x)\,dx + 2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 J_0(x)\cos(n\pi x)\,dx = 1$

(c) **(0.5 Ptos.)** $\displaystyle J_0'(1/2) = -2\pi\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+1)\left(\int_0^1 J_0(x)\cos((2k+1)\pi x)\,dx\right)$

Ayuda: J_0 es una función de clase C^1 de forma que $J_0(0) = 1$.

Problemas

1. Utiliza el Método de las características para resolver los apartados siguientes:

(a) **(1.25 Ptos.)** Obtén la solución del problema

$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x) + \phi(u(t,x))u_x(t,x) = \mathrm{sen}(t)u(t,x), & t>0,\ x>0 \\ u(0,x) = \alpha, & x>0 \end{array}\right\} \qquad (\mathcal{C}1)$$

donde $\alpha > 0$ es una constante y $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función arbitraria.

(b) **(1.25 Ptos.)** Dada la ecuación de Burgers

$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x) + u(t,x)u_x(t,x) = 0, & t>0,\ x\in\mathbb{R} \\ u(0,x) = f(x), & x\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \qquad (\mathcal{C}2)$$

con $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, demuestra que la solución de ($\mathcal{C}2$) verifica la ecuación implícita

$$u(t,x) = f(x - tu(t,x))$$

2. Consideremos el siguiente problema de transmisión de calor por conducción en una barra de longitud uno aislada en un extremo y con la temperatura oscilante en el otro, de forma que inicialmente se encuentra a temperatura constante:

$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x), & t>0,\ 0<x<1 \\ u(t,0) = \alpha\,\mathrm{sen}(\pi t), \quad u_x(t,1) = 0, & t>0 \\ u(0,x) = T_0, & 0<x<1 \end{array}\right\} \qquad (\heartsuit)$$

con $c, \alpha, T_0 > 0$ constantes.

(a) **(0.5 Ptos.)** Comprueba que, si $u(t,x)$ es solución de ($\heartsuit$), la función

$$\omega(t,x) = u(t,x) - (1-x)^2\,\alpha\,\mathrm{sen}(\pi t)$$

es solución de una ecuación del calor no homogénea con condiciones de contorno mixtas (Dirichlet+Neumann) homogéneas en los extremos.

(b) **(2 Ptos.)** Utiliza el método de separación de variables para obtener $\omega(t,x)$.

Sigue detrás $\Rightarrow$

3. Se considera la siguiente ecuación de ondas en una semirrecta:

$$\left.\begin{array}{lr} y_{tt}(t,x) = y_{xx}(t,x) + \mathcal{X}_{[1,T]}(t)\cos(x) & t>0,\ x>0 \\ y(0,x) = \operatorname{sen}(\omega x), \quad y_t(0,x) = 0, & x>0 \\ y(t,0) = \varphi(t), & t>0 \end{array}\right\} \qquad (\spadesuit)$$

siendo $T, \omega > 0$ constantes,

$$\mathcal{X}_{[1,T]}(t) = \begin{cases} 1, & 1 \le t \le T \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

la función de pulsación o característica del intervalo $[1,T]$ y $\varphi : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función arbitraria que describe el comportamiento en el extremo $x = 0$.

(a) **(1.5 Ptos.)** Utiliza la transformada de Laplace para obtener la solución **acotada** del problema ($\spadesuit$) cuando $T < +\infty$.

(b) **(1 Pto.)** Obtén la solución **acotada** en el caso $T = +\infty$ en que el término fuente actúa indefinidamente.

4. **(2.5 Ptos.)** Resuelve la siguiente ecuación de Laplace en un dominio semicircular con condiciones de contorno mixtas:

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta u(x,y) = 1, & (x,y) \in D \\ \nabla u(x,y) \cdot \boldsymbol{n} = 0, & x^2 + y^1 = 1,\ y>0 \\ u(x,0) = 0, & -1 < x < 1 \end{array}\right\}$$

con $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1,\ y > 0\right\}$ y siendo $\boldsymbol{n}$ el vector normal unitario en cada punto de la frontera.

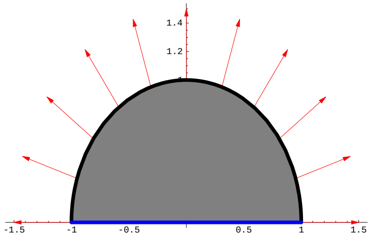

Figura 1: Conjunto D

Ayuda: Reescribir el problema usando coordenadas polares y separar las variables, teniendo en cuenta que la ecuación es no homogénea y las condiciones de contorno Neumann sobre la parte superior de la frontera y Dirichlet sobre la inferior se convierten en

$$\left.\begin{array}{ll} u_r(1,\theta) = 0, & 0 < \theta < \pi \\ u(r,0) = u(r,\pi) = 0, & 0 < r < 1 \end{array}\right\}$$