Ingeniero Industrial
Curso 2009/10
Transformadas Integrales y
Ecuaciones en Derivadas Parciales
19 de enero de 2010

Indicaciones

- Deben responderse **todas** las preguntas de la parte de teoría y cuestiones. De los cuatro problemas propuestos deben **elegirse tres**.
- La duración del examen es de **3.5 horas**.
- Las fechas de publicación de las notas y de revisión se anunciarán en el tablón de anuncios del Departamento de Matemática Aplicada y Estadística en la planta baja del Antiguo Hospital de Marina.

Teoría y cuestiones

1. Las oscilaciones transversales de una viga de Euler-Bernoulli de longitud unidad sometida a una distribución de cargas dada por $q(t,x)$, empotrada en el extremo $x=0$ y libre (o en *voladizo*) en $x=1$ se describen matemáticamente mediante el siguiente problema de contorno:

$$\left.\begin{array}{ll} \rho(x)y_{tt}(t,x)+\left(EI(x)y_{xx}(t,x)\right)_{xx}=q(t,x), & t>0,\ 0<x<1 \\ y(t,0)=y_x(t,0)=0, & t>0 \\ y_{xx}(t,1)=\mathcal{V}(t,1)=0, & t>0 \end{array}\right\} \qquad \text{(E-B)}$$

donde y indica el desplazamiento respecto de la horizontal, ρ es la densidad de la viga, EI es el coeficiente de rigidez y $\mathcal{V}(t,x)=\left(EI(x)y_{xx}(t,x)\right)_x$ denota los esfuerzos cortantes. La energía de la viga se define mediante la expresión

$$\mathcal{E}(t)=\frac{1}{2}\int_0^1 \rho(x)y_t^2(t,x)\,dx+\frac{1}{2}\int_0^1 EI(x)y_{xx}^2(t,x)\,dx$$

que es suma de la energía cinética y de la energía potencial elástica.

(a) **(0.5 Ptos.)** Comprueba que, en el caso de las oscilaciones libres, es decir cuando la carga es nula ($q=0$), la energía $\mathcal{E}(t)$ se mantiene constante a lo largo del tiempo.

(b) **(0.5 Ptos.)** Si $y_1(t,x)$ e $y_2(t,x)$ son dos soluciones de (E-B) para las condiciones iniciales:

$$\checkmark\ y_1(0,x)=\phi(x),\quad \frac{\partial y_1}{\partial t}(0,x)=0, \qquad \checkmark\ y_2(0,x)=\varphi(x),\quad \frac{\partial y_2}{\partial t}(0,x)=0,\quad 0<x<1$$

comprueba que $y^*(t,x)=y_2(t,x)-y_1(t,x)$ es solución del problema homogéneo ($q=0$).

(c) **(0.5 Ptos.)** Si además la viga está compuesta de dos materiales,

$$EI(x)=\begin{cases}\alpha, & 0\le x<1/2\\ \beta, & 1/2\le x\le 1\end{cases}$$

utiliza los apartados anteriores para ver que se verifica la desigualdad

$$\mathcal{E}(t)\le\frac{\max(\alpha,\beta)}{2}\int_0^1\left|\phi''(x)-\varphi''(x)\right|^2dx$$

donde $\mathcal{E}$ es la energía asociada a y^*.

2. Dada la función de Bessel

$$J_0(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

indica, justificando adecuadamente la respuesta, si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas:

(a) **(0.5 Ptos.)** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 J_0(x)\,\mathrm{sen}\,(n\pi x)\,dx=\pi$

(b) **(0.5 Ptos.)** $\displaystyle J_0(1/2)=2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\int_0^1 J_0(y)\,\mathrm{sen}\,(n\pi y)\,dy\right)$

Problemas

1. La ecuación de Buckley-Leverett

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha u_t(t,x)+\beta(t)\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\phi(u(t,x))\right)=0, & t>0,\ x\in\mathbb{R} \\ u(0,x)=\varphi(x), & x\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \qquad (\spadesuit)$$

aparece asociada a modelos de difusión de petróleo en medios porosos. Suponiendo que $\alpha>0$, β es una función continua, ϕ es de clase C^1 y φ es inyectiva:

(a) **(0.5 Ptos.)** Comprueba que el problema ($\spadesuit$) puede resolverse usando el método de las características.

(b) **(1.5 Ptos.)** Demuestra que la solución verifica la ecuación implícita:

$$x=\frac{\phi'(u(t,x))}{\alpha}\int_0^t\beta(r)\,dr+\varphi^{-1}(u(t,x))$$

(c) **(0.5 Ptos.)** Encuentra la solución en el caso particular $\phi(u)=u^2/2$, $\varphi(x)=x$.

Sigue detrás ⇒

2. **(2.5 Ptos.)** Consideremos un problema de transmisión de calor por conducción en una barra acotada de longitud unidad descrito por la ecuación

$$u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) + \operatorname{sen}(t)\cos(x), \quad t>0,\ 0<x<1 \qquad (\mathcal{C})$$

Al aplicar la *ley de enfriamiento de Newton* en los extremos de la barra, suponiendo que la temperatura exterior es constante e igual a T_0 y T_1, respectivamente, se obtienen las condiciones de contorno de tipo Robin

$$u(t,0) + \alpha u_x(t,0) = T_0, \quad u(t,1) + \alpha u_x(t,1) = T_1, \quad t>0 \qquad (\mathcal{R})$$

siendo $\alpha > 0$ constante.

(a) Comprueba que, si $u(t,x)$ es solución de $(\mathcal{C})$-$(\mathcal{R})$, la función

$$\omega(t,x) = u(t,x) - \alpha_0(1-x) - \alpha_1 x$$

con $\alpha_0 = ((1+\alpha)T_0 - \alpha T_1)$ y $\alpha_1 = (\alpha T_0 + (1-\alpha)T_1)$, verifica la ecuación del calor $(\mathcal{C})$ para las condiciones de contorno Robin homogéneas

$$\omega(t,0) + \alpha\omega_x(t,0) = 0, \quad \omega(t,1) + \alpha\omega_x(t,1) = 0, \quad t>0$$

(b) Utiliza el Método de separación de variables para obtener la expresión de ω para una condición inicial arbitraria

$$\omega(0,x) = \omega_0(x), \quad 0<x<1$$

(c) Obtén la solución de $(\mathcal{C})$-$(\mathcal{R})$ suponiendo que la barra se encuentra inicialmente a temperatura constante e igual a cero

$$u(0,x) = 0, \quad 0<x<1 \qquad (\mathcal{I})$$

3. **(2.5 Ptos.)** Utiliza la transformada de Laplace para obtener la solución **acotada** del siguiente problema para la ecuación de ondas en una semirrecta:

$$\left.\begin{array}{ll} y_{tt}(t,x) = c^2 y_{xx}(t,x) + \mathcal{X}_{[T_0,1+T_0]}(t)\cos(x), & t>0,\ x>0 \\ y(0,x) = \operatorname{sen}(\omega x), \quad y_t(0,x) = 0 & x>0 \\ y(t,0) = \varphi(t), & t>0 \end{array}\right\}$$

siendo $T_0, c, \omega > 0$ constantes,

$$\mathcal{X}_{[T_0,1+T_0]}(t) = \begin{cases} 1, & T_0 \le t \le 1+T_0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

la función de pulsación o característica del intervalo $[T_0, 1+T_0]$ y $\varphi : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función arbitraria que describe el comportamiento de la cuerda en el extremo $x=0$.

4. **(2.5 Ptos.)** Resuelve la siguiente ecuación de Laplace en un dominio semicircular con condiciones de contorno mixtas:

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta u(x,y) = x+1, & (x,y)\in D \\ \nabla u(x,y)\cdot \boldsymbol{n} = 0, & x^2+y^2=1,\ y>0 \\ u(x,0) = 0, & -1<x<1 \end{array}\right\} \qquad (\clubsuit)$$

con $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1,\ y>0\right\}$ y siendo $\boldsymbol{n}$ el vector normal unitario en cada punto de la frontera.

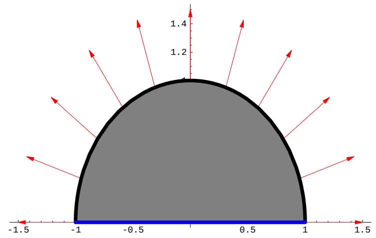

Figura 1: Conjunto D

Ayuda: Reescribir el problema usando coordenadas polares y separar las variables, teniendo en cuenta que la ecuación es no homogénea y las condiciones de contorno Neumann sobre la parte superior de la frontera y Dirichlet sobre la inferior se convierten en

$$\left.\begin{array}{ll} u_r(1,\theta) = 0, & 0<\theta<\pi \\ u(r,0) = u(r,\pi) = 0, & 0<r<1 \end{array}\right\}$$