Departamento de
Matemática Aplicada y
Estadística

Ingeniero Industrial
Curso 2008/09
Transformadas Integrales y
Ecuaciones en Derivadas Parciales
6 de julio de 2009

Indicaciones

- Deben responderse **todas** las preguntas de la parte de teoría y cuestiones. De los cuatro problemas propuestos deben **elegirse tres**.
- La duración del examen es de **3.5 horas**.
- Las fechas de publicación de las notas y de revisión se anunciarán en el tablón de anuncios del Departamento de Matemática Aplicada y Estadística en la planta baja del Antiguo Hospital de Marina.

Teoría y cuestiones

1. Dada la siguiente ecuación, llamada de *Sine-Gordon*, con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas:

$$\left.\begin{array}{ll} u_{tt}(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x) - \operatorname{sen}\left(u(t,x)\right), & t>0, 0<x<1 \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, & t>0 \end{array}\right\} \qquad \text{(S-G)}$$

   se define la *energía* asociada a una solución mediante la expresión

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 u_t^2(t,x)\,dx + \frac{c^2}{2}\int_0^1 u_x^2(t,x)\,dx - \int_0^1 \cos\left(u(t,x)\right)\,dx$$

   (a) **(0.5 Ptos.)** Comprueba que la energía se mantiene constante a lo largo del tiempo, para lo cual es suficiente verificar que la derivada de $\mathcal{E}(t)$ es igual a cero para cada instante t.

   (b) **(0.5 Ptos.)** Se llaman *ondas viajeras* a las soluciones de la forma $u(t,x) = \phi(x-ct)$, con $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función denominada *perfil* de la onda. Comprueba que la única solución de este tipo del problema (S-G) es la idénticamente nula, es decir, $\phi = 0$.

2. Indica, justificando adecuadamente la respuesta, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   (a) **(0.5 Ptos.)** Existe una función impar $f \in L^2(-\pi,\pi)$ de forma que su serie de Fourier trigonométrica es de la forma

$$f \sim \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n} \operatorname{sen}(nx)$$

   (b) **(0.5 Ptos.)** Si las funciones $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ forman una base ortonormal del espacio $L^2(0,1)$, se verifica la igualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^1 \phi_n(y)\,dy \right)^2 = 1$$

   Sugerencia: La función constante igual a uno pertenece a $L^2(0,1)$.

   (c) **(0.5 Ptos.)** Se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \cos(n\pi y)\operatorname{sen}\left(y^2\right)dy = \pi$$

Problemas

1. Dado el problema:

$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x) + (1+\varepsilon u(t,x))\,u_x(t,x) = \varepsilon u(t,x) + \operatorname{sen}(t), & t>0,\ x\in\mathbb{R} \\ u(0,x) = x^2, & x\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \qquad (\mathcal{P}_\varepsilon)$$

   con $\varepsilon > 0$ una constante:

   (a) **(1.5 Ptos.)** Utiliza el Método de las características para obtener la solución de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$.

   (b) **(0.5 Ptos.)** ¿Está dicha solución definida en todo el dominio $[0,+\infty[\ \times\ \mathbb{R}$? ¿Por qué?

   (c) **(0.5 Ptos.)** Comprueba que cuando $\varepsilon \to 0$, las soluciones de los problemas $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ convergen a la solución del problema

$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x) + u_x(t,x) = \operatorname{sen}(t), & t>0,\ x\in\mathbb{R} \\ u(0,x) = x^2, & x\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \qquad (\mathcal{P}_0)$$

2. **(2.5 Ptos.)** Consideremos el siguiente problema con condiciones de contorno de tipo Dirichlet no homogéneas para la ecuación del telégrafo:

$$\left.\begin{array}{ll} y_{tt}(t,x) = y_{xx}(t,x) - \beta y_t(t,x), & t>0,\ 0<x<\pi \\ y(0,x) = y_t(0,x) = 0, & 0<x<\pi \\ y(t,0) = 0, \quad y(t,\pi) = \alpha\operatorname{sen}(t), & t>0 \end{array}\right\} \qquad (\heartsuit)$$

   con $\alpha, \beta > 0$ constantes. Utiliza el método de separación de variables para resolver $(\heartsuit)$.

   Sugerencia: Mediante un procedimiento estándar es posible obtener un problema equivalente con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas.

Sigue detrás ⇒

3. **(2.5 Ptos.)** Utiliza la transformada de Laplace para obtener la solución acotada de la siguiente ecuación de ondas en una semirrecta:

$$\left.\begin{array}{ll} y_{tt}(t,x) = c^2 y_{xx}(t,x) + \delta(t-2)\cos(\pi x), & t,x>0 \\ y(t,0) = \operatorname{sen}(1+t), & t>0 \\ y(0,x) = y_t(0,x) = 0, & x>0 \end{array}\right\}$$

siendo δ la función impulso de Dirac.

4. **(2.5 Ptos.)** El problema de determinar la evolución de la temperatura en un disco unidad $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\right\}$ cuando solamente existe transmisión de calor por conducción, se modeliza mediante la ecuación en derivadas parciales

$$u_t(t,x,y) = u_{xx}(t,x,y) + u_{yy}(t,x,y), \quad t>0,\ (x,y)\in D \tag{EC}$$

Si dicho recinto está aislado, se añade la condición de contorno de tipo Neumann

$$\nabla u\cdot\mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre }]0,+\infty[\times\partial D \tag{CN}$$

con $\mathbf{n}$ el vector normal unitario en cada punto de la frontera de D, que indica que no existe flujo térmico a través de ∂D. Obtén la solución formal del problema (EC)-(CN) para la distribución inicial de temperaturas

$$u(0,x,y) = \begin{cases} 1, & x^2+y^2<\frac{1}{4} \\ 0, & \frac{1}{4}\le x^2+y^2<1 \end{cases}$$

Ayuda:

✓ La condición de contorno (CN) se reescribe en coordenadas polares como $u_r = 0$.

✓ Si $\{\mu_{nm}\}_{m=1}^{\infty}\subset\,]0,+\infty[$ es la sucesión de las soluciones positivas de la ecuación

$$\xi J_n'(\xi) = 0$$

se tiene entonces que las funciones $\psi_{nm}(r) = J_n(\mu_{nm}r)$ son una base ortogonal del espacio $L^2_\omega(0,1)$, con $\omega(r)=r$, de forma que

$$\|\psi\|^2_{L^2_\omega} = \frac{\left(\mu_{nm}^2-n^2\right)J_n(\mu_{nm})^2}{2\mu_{nm}^2}$$