Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Ingeniero Industrial
Curso 2007/08
Transformadas Integrales y Ecuaciones en Derivadas Parciales
10 de septiembre de 2008

INDICACIONES

- Deben responderse **todas** las preguntas de la parte de teoría y cuestiones, excepto los alumnos que presentaron trabajos, los cuales deberán **elegir una** de las cuestiones que valen medio punto.
- De los cuatro problemas propuestos deben **elegirse tres**.
- La duración del examen es de **3.5 horas**.
- La fecha de publicación de las notas y de revisión se anunciará en el tablón de anuncios del Departamento de Matemática Aplicada y Estadística en la planta baja del Antiguo Hospital de Marina.

TEORÍA Y CUESTIONES

1. Las oscilaciones transversales de una viga de Euler-Bernoulli de longitud unidad no sometida a carga, empotrada en el extremo $x = 0$ y apoyada en $x = 1$ se describen matemáticamente mediante el siguiente problema de contorno:

$$\left.\begin{array}{ll} \rho(x)y_{tt}(t,x) + (EI(x)y_{xx}(t,x))_{xx} = 0, & t > 0,\ 0 < x < 1 \\ y(t,0) = y_x(t,0) = 0, & t > 0 \\ y(t,1) = y_{xx}(t,1) = 0, & t > 0 \end{array}\right\} \qquad \text{(E-B)}$$

donde y indica el desplazamiento respecto de la horizontal, ρ es la densidad de la viga y EI es el coeficiente de rigidez. La energía de la viga se define mediante la expresión

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \rho(x)y_t^2(t,x)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 EI(x)y_{xx}^2(t,x)\,dx$$

que es suma de la energía cinética y de la energía potencial elástica.

(a) **(1 Pto.)** Comprueba que la energía $\mathcal{E}(t)$ se mantiene constante a lo largo del tiempo.

(b) **(0.5 Ptos.)** Si además la viga está compuesta de dos materiales,

$$EI(x) = \begin{cases} \alpha, & 0 \le x < 1/2 \\ \beta, & 1/2 \le x \le 1 \end{cases}$$

e inicialmente está en reposo con una configuración sinusoidal,

$$y(0,x) = \kappa\,\mathrm{sen}(\pi x), \qquad y_t(0,x) = 0, \qquad 0 < x < 1$$

con α, β, κ constantes, calcula el valor de la energía $\mathcal{E}(t)$.

2. Dado el siguiente problema inicial para la ecuación de ondas en la recta real

$$\left.\begin{array}{ll} u_{tt}(t,x) - u_{xx}(t,x) = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = \mathrm{sen}(x), & x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \qquad (\heartsuit)$$

(a) **(0.5 Ptos.)** Comprueba que la función

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{sen}(x+t) + \mathrm{sen}(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(y)\,dy$$

es solución de $(\heartsuit)$ para cualquier función arbitraria $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. ¿Significa esto que el problema está *bien puesto*?

(b) **(0.5 Ptos.)** ¿Qué ocurre si añadimos la condición $u_t(0,x) = 0$?

PROBLEMAS

1. Sea el problema de Cauchy

$$\left.\begin{array}{ll} u^2(x,y)u_x(x,y) + u_y(x,y) = u(x,y) + 1, & x, y \in \mathbb{R} \\ u(x,x) = \alpha, & x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \qquad (\clubsuit)$$

con α constante.

(a) **(1.5 Ptos.)** Discute para qué valores del parámetro α es posible utilizar el Método de las características para encontrar la solución de $(\clubsuit)$ y obtén la forma explícita de dicha solución en los casos en los que sea posible.

(b) **(0.5 Ptos.)** ¿Cuál es el dominio de definición de las soluciones obtenidas en el apartado anterior?

(c) **(0.5 Ptos.)** ¿Existe algún valor de α para el que no pueda aplicarse el Método de las características? ¿Tiene en ese caso solución el problema $(\clubsuit)$? ¿Por qué?

Sigue detrás ⇒

2. Se considera una cuerda elástica de longitud infinita inicialmente en reposo. Durante un cierto periodo de tiempo se hace oscilar el extremo $x = 0$, lo que provoca oscilaciones que se transmiten a través de la cuerda haciéndola vibrar transversalmente. Este fenómeno se describe matemáticamente mediante el siguiente problema:

$$\left.\begin{array}{ll} y_{tt}(t,x) = c^2 y_{xx}(t,x), & t > 0,\ x > 0 \\ y(0,x) = y_t(0,x) = 0, & x > 0 \\ y(t,0) = \mathcal{X}_{[0,T]}(t)\phi(t), & t > 0 \end{array}\right\} \qquad (\spadesuit)$$

con $c > 0$ constante, donde $y(t,x)$ indica el desplazamiento de la cuerda respecto de la horizontal del punto x en el instante t,

$$\mathcal{X}_{[0,T]}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases}$$

es la función característica del intervalo temporal $[0,T]$ y $\phi(t)$ es la función describiendo las oscilaciones a lo largo del tiempo.

(a) **(2 Ptos.)** Suponiendo que $0 < T < \infty$, utiliza la transformada de Laplace para encontrar la solución **acotada** de ($\spadesuit$)

(b) **(0.5 Ptos.)** Encuentra la solución de ($\spadesuit$) para $T = \infty$. ¿Observas alguna diferencia entre la solución de este apartado y la obtenida anteriormente? ¿Puedes darle una interpretación física?

3. **(2.5 Ptos.)** Consideremos una barra de longitud unidad aislada en el extremo $x = 0$ y de forma que se conoce el flujo térmico en $x = 1$. El estudio de la evolución de la temperatura en cada punto de la barra a lo largo del tiempo, suponiendo que solamente se transmite calor por difusión, a partir de una temperatura constante u_0 lleva a plantear el siguiente problema

$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x), & t > 0,\ 0 < x < 1 \\ u(0,x) = u_0, & 0 < x < 1 \\ u_x(t,0) = 0, \quad u_x(t,1) = \alpha\,\mathrm{sen}(\pi t), & t > 0 \end{array}\right\} \qquad (\heartsuit)$$

con $\alpha, c > 0$, $u_0 \in \mathbb{R}$ constantes y siendo $u(t,x)$ la temperatura en el instante t del punto x. Utiliza el método de separación de variables para resolver ($\heartsuit$).

Ayuda: El cambio $\omega(t,x) = u(t,x) - \frac{x^2}{2}\alpha\,\mathrm{sen}(\pi t)$ permite obtener un problema equivalente con condiciones de contorno Neumann homogéneas.

4. **(2.5 Ptos.)** Resuelve el siguiente problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson en un disco perforado de semiejes $0 < \alpha < \beta$:

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta u(x,y) = g(x,y), & (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) = 0, & (x,y) \in \partial\Omega \end{array}\right\}$$

con $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha^2 < x^2 + y^2 < \beta^2\right\}$ y

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, & \text{si } y > 0 \\ 0, & \text{si } y \leq 0 \end{cases}$$

Ayuda: Reescribir el problema en coordenadas polares teniendo en cuenta que al separar las variables la función asociada al ángulo y su derivada son 2π-periódicas.