Departamento de
Matemática Aplicada y
Estadística

Ingeniero Industrial
Curso 2007/08
Transformadas Integrales y
Ecuaciones en Derivadas Parciales
5 de julio de 2008

Indicaciones

- Deben responderse **todas** las preguntas de la parte de teoría y cuestiones, excepto los alumnos que presentaron trabajos, los cuales deberán **elegir una** de las cuestiones que valen medio punto.
- De los cuatro problemas propuestos deben **elegirse tres**.
- La duración del examen es de **3.5 horas**.
- Tal como se indica en la convocatoria, las notas se publicarán el **miércoles 9 de julio** en el tablón de anuncios del Departamento de Matemática Aplicada y Estadística en la planta baja del Antiguo Hospital de Marina. El horario de revisión será:
  - ✓ Miércoles 9, de **15:30** a **17:30**
  - ✓ Jueves 10, de **9:30** a **11:30**

Teoría y cuestiones

1. **(1 Pto.)** Las oscilaciones transversales de una viga de Euler-Bernoulli de longitud unidad no sometida a carga, de forma que está empotrada en el extremo $x = 0$ y en el otro se ejerce una fuerza variable de magnitud $u(t)$, se describen matemáticamente mediante el siguiente problema de contorno:

$$\left.\begin{array}{ll} \rho(x)y_{tt}(t,x) + \left(EI(x)y_{xx}(t,x)\right)_{xx} = 0, & t > 0,\ 0 < x < 1 \\ y(t,0) = y_x(t,0) = 0, & t > 0 \\ y_{xx}(t,1) = 0,\ \ \mathcal{V}(t,1) = u(t), & t > 0 \end{array}\right\} \qquad \text{(E-B)}$$

donde y indica el desplazamiento respecto de la horizontal, ρ es la densidad de la viga, EI es el coeficiente de rigidez y $\mathcal{V}(t,x) = \left(EI(x)y_{xx}(t,x)\right)_x$ es el valor de los esfuerzos cortantes. La energía de la viga se define mediante la expresión

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \rho(x)y_t^2(t,x)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 EI(x)y_{xx}^2(t,x)\,dx$$

que es suma de la energía cinética y de la energía potencial elástica. Comprueba que, si la fuerza ejercida en el extremo $x = 1$ es proporcional a la velocidad de oscilación en dicho punto, $u(t) = \beta(t)y_t(t,1)$, $\beta(t) > 0$, entonces la energía $\mathcal{E}(t)$ es decreciente.

2. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, razonando convenientemente la respuesta:

   (a) **(0.5 Ptos.)** Se verifica la igualdad:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \log(1+x^2)\cos(n\pi x)\,dx = 1$$

   (b) **(0.5 Ptos.)** Dado el siguiente sistema de Sturm-Liouville singular de tipo Bessel,

$$\left.\begin{array}{ll} x^2y''(x) + xy'(x) - y(x) = -\mu^2x^2y(x), & 0 < x < 1 \\ \exists\ y(0), & \\ \alpha y(1) + \beta y'(1) = 0 & \end{array}\right\} \qquad \text{(S-L)}$$

   con $\alpha, \beta > 0$ constantes, se tiene que μ^2 es un valor propio de (S-L) si y solamente si μ es solución de la ecuación

$$\alpha J_1(\mu) + \beta\mu J_1'(\mu) = 0$$

   (c) **(0.5 Ptos.)** La transformada de Fourier $\widehat{u}(t,\xi)$ de la solución del siguiente problema de transmisión de calor con disipación

$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) - \beta u_x(t,x), & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = \phi(x), & x \in \mathbb{R} \end{array}\right\}$$

   con

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le \pi \\ 0, & x \notin [0,\pi] \end{cases}$$

   verifica la igualdad

$$\widehat{u}(t,\xi) = \frac{\operatorname{sen}(\pi\xi)\,e^{-4\pi^2\xi^2 t}}{\pi\xi}\left(\cos(\pi\xi(2\beta t+1)) - \mathbf{i}\operatorname{sen}(\pi\xi(2\beta t+1))\right)$$

Sigue detrás ⇒

PROBLEMAS

1. Dado el problema,

$$\left.\begin{array}{ll} (1-\varepsilon t)\, u_t(t,x) + x u_x(t,x) = 1, & t>0,\ x\in\mathbb{R} \\ u(0,x) = \cos(x^2+1), & x\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \qquad (\mathcal{P}_\varepsilon)$$

con $\varepsilon > 0$ constante:

(a) **(1.5 Ptos.)** Utiliza el método de las características para obtener la solución de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$.

(b) **(0.5 Ptos.)** Calcula el intervalo temporal en el que está definida la solución anterior.

(c) **(0.5 Ptos.)** Utiliza el método de las características para obtener la solución del problema para $\varepsilon = 0$ y comprueba que cuando $\varepsilon \to 0$, las soluciones de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ convergen puntualmente a la de $(\mathcal{P}_0)$.

2. Se considera una cuerda elástica de longitud infinita inicialmente en reposo. Durante un cierto periodo de tiempo se hace oscilar el extremo $x=0$, lo que provoca oscilaciones que se transmiten a través de la cuerda haciéndola vibrar transversalmente. Este fenómeno se describe matemáticamente mediante el siguiente problema:

$$\left.\begin{array}{ll} y_{tt}(t,x) = c^2 y_{xx}(t,x), & t>0,\ x>0 \\ y(0,x) = y_t(0,x) = 0, & x>0 \\ y(t,0) = \mathcal{X}_{[0,T]}(t)\,\mathrm{sen}(\omega t), & t>0 \end{array}\right\} \qquad (\spadesuit)$$

con $c, \omega > 0$ constantes, donde $y(t,x)$ indica el desplazamiento de la cuerda respecto de la horizontal del punto x en el instante t y

$$\mathcal{X}_{[0,T]}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le T \\ 0, & t > T \end{cases}$$

es la función característica del intervalo temporal $[0,T]$.

(a) **(2 Ptos.)** Suponiendo que $0 < T < \infty$, utiliza la transformada de Laplace para encontrar la solución **acotada** de $(\spadesuit)$

(b) **(0.5 Ptos.)** Encuentra la solución de $(\spadesuit)$ para $T = \infty$. ¿Observas alguna diferencia entre la solución de este apartado y la obtenida anteriormente? ¿Puedes darle una interpretación física?

3. **(2.5 Ptos.)** Resuelve el siguiente problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson en el círculo unidad:

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta u(x,y) = g(x,y), & (x,y)\in\Omega \\ u(x,y) = 0, & (x,y)\in\partial\Omega \end{array}\right\}$$

con $\Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\right\}$ y

$$g(x,y) = \begin{cases} 1-\sqrt{x^2+y^2}, & \text{si } y>0 \\ 0, & \text{si } y \le 0 \end{cases}$$

Ayuda: Reescribir el problema en coordenadas polares, teniendo en cuenta que al separar las variables, la función asociada al radio debe estar definida en cero y la función asociada al ángulo y su derivada son 2π-periódicas.

4. **(2.5 Ptos.)** Consideremos el problema de determinar la evolución de la temperatura en el disco unidad $\Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\right\}$. Esta situación se modeliza mediante la ecuación en derivadas parciales

$$u_t(t,x,y) = u_{xx}(t,x,y) + u_{yy}(t,x,y), \quad t>0,\ (x,y)\in\Omega \qquad \text{(EC)}$$

junto con la condición de contorno de tipo Neumann

$$\nabla u\cdot\mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre }]0,+\infty[\,\times\,\partial\Omega \qquad \text{(CC)}$$

que indica que el recinto Ω está aislado, siendo $\mathbf{n}$ el vector normal unitario en cada punto de la frontera de Ω. Obtén la solución del problema (EC)-(CC) para la distribución inicial de temperaturas

$$u(0,x,y) = \begin{cases} 1, & x^2+y^2<\delta^2,\ y>0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

con $0<\delta<1$ constante.

Ayuda:

- ✓ La condición (CC) se escribe en coordenadas polares de la forma:

$$u_r(1,\theta) = 0, \quad 0<\theta<2\pi$$

- ✓ Si $\{\mu_{nm}\}_{m=1}^{\infty} \subset\,]0,+\infty[$ es la sucesión de las soluciones positivas de la ecuación

$$\xi J_n'(\xi) = 0$$

se tiene entonces que las funciones $\psi_{nm}(r) = J_n(\mu_{nm} r)$ son una base ortogonal del espacio $L^2_\omega(0,1)$, con $\omega(r) = r$, de forma que

$$\|\psi_{nm}\|^2_{L^2_\omega} = \frac{\left(\mu_{nm}^2 - n^2\right) J_n(\mu_{nm})^2}{2\mu_{nm}^2}$$