Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Ingeniero Industrial
Curso 2006/07
Transformadas Integrales y Ecuaciones en Derivadas Parciales
16 de febrero de 2007

Indicaciones

- Deben responderse **todas** las preguntas de la parte de teoría y cuestiones, excepto los alumnos que presentaron trabajos, los cuales deberán **elegir una** de las cuestiones que valen medio punto.
- De los cuatro problemas propuestos deben **elegirse tres**.
- La duración del examen es de **3.5 horas**.
- Tal como se indica en la convocatoria, las notas se publicarán el **miércoles 21 de febrero** en el tablón de anuncios del Departamento de Matemática Aplicada y Estadística en la planta baja del Antiguo Hospital de Marina. El horario de revisión será:
  - ✓ Jueves 22, de **16:00** a **18:00**
  - ✓ Viernes 23, de **9:30** a **11:30**

Teoría y cuestiones

1. **(1 Pto.)** Bajo hipótesis adecuadas, las oscilaciones transversales de una cuerda elástica pueden describirse mediante la ecuación de ondas, donde el parámetro c depende del material del que está hecha la cuerda. Para determinar su valor en un caso particular se diseña el siguiente experimento: se selecciona un trozo de cuerda de longitud unidad y se fija por los extremos. A continuación se pulsa la cuerda hasta que adquiere una posición sinusoidal y, tras soltarla, se la deja oscilar libremente, lo que nos da el problema

$$\left.\begin{array}{ll} u_{tt}(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x), & t>0,\ 0<x<1 \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, & t>0 \\ u(0,x) = 0.2\,\mathrm{sen}(\pi x), & 0<x<1 \\ u_t(0,x) = 0, & 0<x<1 \end{array}\right\}$$

En el instante $t=1$ se mide la altura de la cuerda en el punto medio $x=0.5$ que resulta se de 0.1 unidades, es decir, $u(1,0.5)=0.1$. Utiliza toda esta información para determinar el valor de c.

2. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, razonando convenientemente la respuesta:

   (a) **(0.5 Ptos.)** Si las funciones $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ forman una base ortonormal de $L^2(0,\pi)$, se verifica la igualdad:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\pi}\cos(x)\phi_n(x)\,dx\right)^2 = \frac{\pi}{2}$$

   (b) **(0.5 Ptos.)** Dado el siguiente sistema de Sturm-Liouville singular de tipo Bessel,
$$\left.\begin{array}{ll} x^2 f''(x) + x f'(x) - f(x) = -\mu^2 x^2 f(x), & 0<x<\ell \\ \exists\ f(0), & \\ \alpha f(\ell) + \beta f'(\ell) = 1 & \end{array}\right\} \qquad \text{(S-L)}$$
   con $\alpha,\beta>0$ constantes, se tiene que μ^2 es un valor propio de (S-L) si y solamente si es de la forma $\mu=\eta/\ell$, con η solución de la ecuación
$$\ell\alpha J_1(\eta) + \beta\eta J_1'(\eta) = 0$$

   (c) **(0.5 Ptos.)** El problema de Cauchy
$$\left.\begin{array}{ll} u_x(x,y) + u_y(x,y) = 1, & (x,y)\in\mathbb{R}^2 \\ u(x,x) = \cos(x), & x\in\mathbb{R} \end{array}\right\}$$
   está bien puesto en el sentido de Hadamard.

Problemas

1. Dado el problema:
$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x) + (1+\varepsilon u(t,x))\,u_x(t,x) = u(t,x), & t>0,\ x\in\mathbb{R} \\ u(0,x) = x^2, & x\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \qquad (\mathcal{P}_\varepsilon)$$
con $\varepsilon>0$ una constante:

   (a) **(1.5 Ptos.)** Utiliza el método de las características para obtener la solución de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$.

   (b) **(0.5 Ptos.)** ¿Está dicha solución definida en todo el dominio $[0,+\infty[\,\times\,\mathbb{R}$? ¿Por qué?

   (c) **(0.5 Ptos.)** Comprueba que cuando $\varepsilon\to 0$, las soluciones de los problemas $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ convergen a la solución del problema
$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x) + u_x(t,x) = u(t,x), & t>0,\ x\in\mathbb{R} \\ u(0,x) = x^2, & x\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \qquad (\mathcal{P}_0)$$

Sigue detrás ⇒

2. **(2.5 Ptos.)** En el caso en que existe disipación, las oscilaciones transversales de una cuerda elástica de longitud unidad inicialmente en reposo, de forma que uno de sus extremos está fijo y sobre el otro se ejerce un movimiento oscilatorio, se describen matemáticamente mediante las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{ll} y_{tt}(t,x) = c^2 y_{xx}(t,x) - \alpha y_t(t,x), & t>0,\ 0<x<1 \\ y(t,0)=0, \quad y(t,1)=\mathrm{sen}(t), & t>0 \\ y(0,x)=y_t(0,x)=0, & 0<x<1 \end{array}\right\} \qquad (\spadesuit)$$

donde $y(t,x)$ indica la altura en el instante t del punto x ($c, \alpha > 0$ constantes). Encuentra la solución de este problema usando el método de separación de variables.

3. Consideremos un problema unidimensional de transmisión de calor por conducción en una barra aislada en los extremos, de forma que la temperatura inicial es constante y durante un periodo de tiempo actúa una fuente de calor:

$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x) + \beta \mathcal{X}_{[0,T]}(t), & t>0,\ 0<x<1 \\ u(0,x)=u_0, & 0<x<1 \\ u_x(t,0)=u_x(t,1)=0, & t>0 \end{array}\right\} \qquad (\clubsuit)$$

siendo $\beta, u_0 \in \mathbb{R}$, $T>0$ constantes y

$$\mathcal{X}_{[0,T]}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le T \\ 0, & t > T \end{cases}$$

la función característica del intervalo $[0,T]$.

(a) **(1.5 Ptos.)** Utiliza la transformada de Laplace para encontrar la solución de ($\clubsuit$). ¿Qué pasará con la temperatura de la barra cuando pase mucho tiempo ($t \to \infty$)?

(b) **(1 Pto.)** Resuelve ahora el caso en que la temperatura inicial no es constante, $u(0,x) = \cos(\pi x)$ y estudia el comportamiento asintótico del sistema, es decir, qué ocurre cuando $t \to \infty$.

(**Ayuda:** Si $z \in \mathbb{C}$ es un número complejo con parte real positiva, $e^{\sqrt{z}} \neq e^{-\sqrt{z}}$).

4. **(2.5 Ptos.)** Resuelve la siguiente ecuación de Poisson en un dominio circular cuyos extremos permanecen fijos:

$$\left.\begin{array}{ll} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = \frac{1}{2} - \sqrt{x^2+y^2}, & (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) = 0, & (x,y) \in \partial\Omega \end{array}\right\}$$

con $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\right\}$.

(**Ayuda:** Usar coordenadas polares, teniendo en cuenta que al separar las variables, la función asociada al radio debe estar definida en cero y la función asociada al ángulo y su derivada son 2π-periódicas).