Departamento de
Matemática Aplicada y
Estadística

Ingeniero Industrial
Curso 2005/06
Transformadas Integrales y
Ecuaciones en Derivadas Parciales
28 de junio de 2006

INDICACIONES

- Deben responderse **todas** las preguntas de la parte de teoría y cuestiones.
- De los cuatro problemas propuestos deben **elegirse tres**.
- La duración del examen es de **3.5 horas**.
- Las fechas de publicación de las notas y de revisión se anunciarán en los tablones del Departamento el día siguiente al de la realización del examen.

TEORÍA Y CUESTIONES

1. Indica, justificando la respuesta, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   (a) **(0.5 Ptos.)** Existe una función impar $f \in L^2(-\pi, \pi)$ de forma que su serie de Fourier trigonométrica es de la forma
   $$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos(1/n) \operatorname{sen}(nx)$$

   (b) **(0.5 Ptos.)** Si las funciones $\{\phi_n\}$ forman una base ortonormal de $L^2(0,1)$, se verifica la igualdad
   $$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \phi_n(x) \cos(x+1)\, dx = 0$$

2. La descripción de las ondas superficiales en un canal de aguas someras lleva a plantear la *ecuación de Korteweg-de Vries*
   $$u_t(t,x) + \alpha\, u_{xxx}(t,x) + \gamma\, u(t,x) u_x(t,x) = 0, \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R} \tag{$\heartsuit$}$$
   con $\alpha, \gamma \geq 0$ constantes.

   (a) **(0.75 Ptos.)** Si $u(t,x)$ es una solución de ($\heartsuit$) verificando además que en cada instante $t \geq 0$
   $$\lim_{x\to\pm\infty} u(t,x) = \lim_{x\to\pm\infty} u_x(t,x) = 0,$$
   comprueba que el funcional
   $$\mathcal{M}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(t,x)\, dx$$
   es constante. **Ayuda:** Basta demostrar que $\mathcal{M}'(t) = 0$.

   (b) **(0.75 Ptos.)** Las soluciones de la forma $u(t,x) = \varphi(x - ct)$, con $c \in \mathbb{R}$ constante, se denominan *ondas viajeras* (*travelling waves*), siendo $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función perfil de la onda. Determina las soluciones de este tipo para la *ecuación de Airy*, que es el nombre que recibe ($\heartsuit$) cuando $\gamma = 0$. **Ayuda:** Hay que demostrar que que φ verifica la ecuación diferencial $-c\varphi'(s) + \alpha\varphi'''(s) = 0$ y, seguidamente, resolver dicha ecuación teniendo en cuenta los distintos valores de c.

PROBLEMAS

1. La ecuación de Buckley-Leverett
   $$\left.\begin{array}{ll} \alpha \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \beta(t) \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\Phi(u(t,x))\right) = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \tag{$\clubsuit$}$$
   aparece asociada a modelos de difusión de petróleo en medios porosos. Suponiendo que $\alpha > 0$, β es una función continua, Φ es de clase C^1 y φ es inyectiva:

   (a) **(0.5 Ptos.)** Comprueba que el problema ($\clubsuit$) puede resolverse usando el método de las características.

   (b) **(1.5 Ptos.)** Demuestra que la solución verifica la ecuación implícita:
   $$x = \frac{\Phi'(u(t,x))}{\alpha} \int_0^t \beta(r)\, dr + \varphi^{-1}(u(t,x))$$

   (c) **(0.5 Ptos.)** Encuentra la solución en el caso particular $\Phi(u) = u^2/2$, $\varphi(x) = x$.

2. **(2.5 Ptos.)** Utiliza la transformada de Laplace para obtener la solución de la siguiente ecuación lineal del transporte en una semirrecta:
   $$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x) + \alpha u_x(t,x) = \beta u(t,x), & t, x > 0 \\ u(t,0) = \begin{cases} 1, & t \leq t_0 \\ 0, & t > t_0 \end{cases}, & t > 0 \\ u(0,x) = \operatorname{sen}(\omega x), & x > 0 \end{array}\right\}$$
   siendo $\alpha, \beta, \omega, t_0$ constantes positivas.

3. **(2.5 Ptos.)** Consideremos el problema de transmisión de calor en una barra acotada de longitud unidad modelado por la ecuación:
   $$u_t(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x), \qquad t > 0,\ 0 < x < 1 \tag{Ec}$$
   Al tener en cuenta la *ley de enfriamiento de Newton* sobre los extremos de la barra, suponiendo que la temperatura en el exterior de la misma es constante e igual a $T_0 > 0$, se obtienen las siguientes las siguientes condiciones de contorno de tipo Robin
   $$u(t,0) + u_x(t,0) = T_0, \qquad u(t,1) + u_x(t,1) = T_0, \qquad t > 0 \tag{Cc}$$

Sigue detrás ⇒

(a) Comprueba que la función $\omega(t,x) = u(t,x) - T_0$ es solución de la ecuación del calor (Ec) y verifica condiciones de contorno homogéneas de tipo Robin.

(b) Escribe el problema de Sturm-Liouville resultante de separar las variables de ω para la función espacial $X(x)$ (teniendo en cuenta que $\omega(t,x) = T(t)X(x)$) y obtén sus autovalores y autofunciones.

(c) Determina, usando el apartado anterior, la solución de (Ec)-(Cc) para la condición inicial

$$u(0,x) = x$$

4. **(2.5 Ptos.)** Consideremos un problema de transmisión de calor por conducción en un disco de centro cero y radio uno $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\right\}$. Esta situación se modeliza mediante la ecuación en derivadas parciales

$$u_t(t,x,y) = u_{xx}(t,x,y) + u_{yy}(t,x,y), \quad t > 0, \ (x,y) \in D \tag{$\spadesuit$}$$

junto con la condición de contorno de tipo Neumann

$$\nabla u \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre }]0,+\infty[\times \partial D \tag{$\diamondsuit$}$$

que indica que el recinto D está aislado, siendo $\mathbf{n}$ el vector normal unitario en cada punto de la frontera de D. Obtén la solución formal del problema ($\spadesuit$)-($\diamondsuit$) para la distribución inicial de temperaturas

$$u(0,x,y) = \begin{cases} 1, & x^2 + y^2 < \frac{1}{4}, \ y > 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ayuda: Si $\{\mu_{nm}\}_{m=1}^{\infty} \subset]0,+\infty[$ es la sucesión de las soluciones positivas de la ecuación

$$\xi J_n'(\xi) = 0$$

se tiene entonces que las funciones $\psi_{nm}(r) = J_n(\mu_{nm} r)$ son una base ortogonal del espacio $L^2_\omega(0,1)$, con $\omega(r) = r$, de forma que

$$\|\psi\|^2_{L^2_\omega} = \frac{\left(\mu_{nm}^2 - n^2\right) J_n(\mu_{nm})^2}{2\mu_{nm}^2}$$