Departamento de
Matemática Aplicada y
Estadística

Ingeniero Industrial
Curso 2005/06
Transformadas Integrales y
Ecuaciones en Derivadas Parciales
9 de febrero de 2006

Teoría y cuestiones

1. Indica, justificando la respuesta, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   (a) **(0.5 Ptos.)** Existe una función impar $f \in L^2(-\pi,\pi)$ de forma que su serie de Fourier trigonométrica es de la forma
   $$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \operatorname{sen}(nx)$$

   (b) **(0.5 Ptos.)** Si las funciones $\{\phi_n\}$ forman una base ortonormal de $L^2(0,1)$, se tiene que
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^1 \phi_n(x)\, dx \right)^2 \geq 1/2$$
   Sugerencia: La función constante igual a uno pertenece al espacio $L^2(0,1)$.

2. El estudio de las vibraciones transversales no forzadas (o *libres*) de una viga elástica (o de Euler-Bernoulli) de longitud $\ell > 0$, con densidad constante $\rho > 0$ y módulo de rigidez $EI > 0$, lleva a plantear el siguiente problema
   $$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}(t,x) + \kappa^2 \dfrac{\partial^4 y}{\partial x^4}(t,x) = 0, & t > 0,\ 0 < x < \ell \\ y(t,0) = \dfrac{\partial y}{\partial x}(t,0) = 0, & t > 0 \\ y(t,\ell) = \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}(t,\ell) = 0, & t > 0 \end{array}\right\} \qquad (\heartsuit)$$
   donde $y(t,x)$ es el desplazamiento vertical en el instante $t > 0$ del punto x. Se supone además que la viga está empotrada en el extremo $x = 0$ y apoyada en $x = \ell$, con $\kappa^2 = EI/\rho$.

   (a) **(0.5 Ptos.)** Comprueba que, al separar las variables en $(\heartsuit)$, $y(t,x) = T(t)X(x)$, la variable espacial genera el sistema de Sturm-Liouville de orden cuatro:
   $$\left.\begin{array}{ll} X^{iv}(x) = \lambda X(x), & 0 < x < \ell \\ X(0) = X'(0) = 0, & \\ X(\ell) = X''(\ell) = 0 & \end{array}\right\} \qquad \text{(S-L)}$$

   (b) **(0.5 Ptos.)** Si $\mathcal{D} = \left\{ f \in C^4([0,\ell]) : f(0) = f'(0) = 0,\ f(\ell) = f''(\ell) = 0 \right\}$, demuestra que para cada $f \in \mathcal{D}$:
   $$\langle S(f), f \rangle = \int_0^\ell |f''(x)|^2 dx$$
   siendo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto escalar en $L^2(0,\ell)$ y $S(f) = f^{iv}$

   (c) **(0.5 Ptos.)** Demuestra, usando el resultado anterior, que (S-L) no tiene autovalores negativos.

Problemas

1. Dado el problema
   $$\left.\begin{array}{ll} \alpha u_t(t,x) + \left(u^2(t,x) - 1\right) u_x(t,x) = \cos(\omega t), & t, x > 0 \\ u(t,0) = t, & t > 0 \end{array}\right\} \qquad (\clubsuit)$$

   (a) **(2 Ptos.)** Encuentra su solución usando el método de las características.

   (b) **(0.5 Ptos.)** ¿Está dicha solución definida en el punto $(1,0)$? Razona la respuesta.

2. **(2.5 Ptos.)** Utiliza la transformada de Laplace para obtener la solución de la siguiente ecuación lineal del transporte en una semirrecta:
   $$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x) + \alpha u_x(t,x) = \beta u(t,x), & t, x > 0 \\ u(t,0) = \delta(t - t_0), & t > 0 \\ u(0,x) = u_0, & x > 0 \end{array}\right\}$$
   siendo δ la función impulso de Dirac y α, β, u_0, t_0 constantes.

3. **(2.5 Ptos.)** Resuelve el siguiente problema con condiciones de contorno no homogéneas para la ecuación de Klein-Gordon en el intervalo unidad ($\beta > 1$):
   $$\left.\begin{array}{ll} u_{tt}(t,x) = u_{xx}(t,x) - \beta^2 u(t,x), & t > 0,\ 0 < x < 1 \\ u(t,0) = 0, \quad u(t,1) = \operatorname{sen}(t), & t > 0 \\ u(0,x) = u_t(0,x) = 0, & 0 < x < 1 \end{array}\right\}$$

4. **(2.5 Ptos.)** Consideremos un problema de transmisión de calor por conducción en un disco de centro cero y radio uno $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \right\}$. Esta situación se modeliza mediante la ecuación en derivadas parciales
   $$u_t(t,x,y) = u_{xx}(t,x,y) + u_{yy}(t,x,y), \quad t > 0,\ (x,y) \in D \qquad (\spadesuit)$$
   junto con la condición de contorno de tipo Neumann
   $$\nabla u \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre }]0,+\infty[\times \partial D \qquad (\diamondsuit)$$
   que indica que el recinto D está aislado, siendo $\mathbf{n}$ el vector normal unitario en cada punto de la frontera de D. Obtén la solución formal del problema $(\spadesuit)$-$(\diamondsuit)$ para la distribución inicial de temperaturas
   $$u(0,x,y) = \begin{cases} 1, & x^2 + y^2 < \frac{1}{4},\ y > 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ayuda: Si $\{\mu_{nm}\}_{m=1}^{\infty} \subset]0,+\infty[$ es la sucesión de las soluciones positivas de la ecuación

$$\xi J_n'(\xi) = 0$$

se tiene entonces que las funciones $\psi_{nm}(r) = J_n(\mu_{nm} r)$ son una base ortogonal del espacio $L^2_\omega(0,1)$, con $\omega(r) = r$, de forma que

$$\|\psi\|^2_{L^2_\omega} = \frac{\left(\mu_{nm}^2 - n^2\right) J_n(\mu_{nm})^2}{2\mu_{nm}^2}$$

Indicaciones

- Deben responderse **todas** las preguntas de la parte de teoría y cuestiones.
- De los cuatro problemas propuestos deben **elegirse tres**.
- La duración del examen es de **3.5 horas**.
