Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Ingeniero Industrial
Curso 2004/05
Transformadas Integrales y Ecuaciones en Derivadas Parciales
12 de septiembre de 2005

TEORÍA Y CUESTIONES

1. Dada la siguiente ecuación de Sine-Gordon con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas:

$$\left.\begin{array}{ll} u_{tt}(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x) - \operatorname{sen}\left(u(t,x)\right), & t>0,\ 0<x<1 \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, & t>0 \end{array}\right\} \qquad (\clubsuit)$$

se define la *energía* asociada a una solución mediante la expresión

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 u_t^2(t,x)\,dx + \frac{c^2}{2}\int_0^1 u_x^2(t,x)\,dx - \int_0^1 \cos\left(u(t,x)\right)\,dx$$

(a) **(0.5 Ptos.)** Comprueba que la energía se mantiene constante (**Sugerencia:** Es suficiente ver que la derivada de $E(t)$ es igual a cero).

(b) **(0.5 Ptos.)** Demuestra que cuando existe disipación, es decir, se tiene la ecuación

$$u_{tt}(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x) - \operatorname{sen}\left(u_t(t,x)\right) - \beta u_t(t,x), \quad t>0,\ 0<x<1 \qquad (\spadesuit)$$

con $\beta > 0$ constante, le energía $E(t)$ decrece con el tiempo.

2. **(1.5 Ptos.)** El problema de estudiar las vibraciones transversales de una viga elástica (o de Euler-Bernoulli) de longitud infinita, con densidad constante $\rho > 0$ y módulo de rigidez $EI > 0$, lleva a plantear el siguiente problema

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}(t,x) + \kappa \dfrac{\partial^4 y}{\partial x^4}(t,x) = q(x), & t>0,\ x\in\mathbb{R} \\ y(0,x) = f(x), \quad \dfrac{\partial y}{\partial t}(0,x) = 0, & x\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \qquad (\heartsuit)$$

donde q indica la densidad de carga en cada punto, f es la posición inicial de la viga (que inicialmente se encuentra en reposo) y $\kappa = EI/\rho$. Comprueba que la transformada de Fourier de la función y es de la forma:

$$\widehat{y}(t,\xi) = \left(\widehat{f}(\xi) - \frac{\widehat{q}(\xi)}{(2\pi\xi)^4\kappa}\right)\cos\left(4\pi^2\xi^2\kappa\, t\right) + \frac{\widehat{q}(\xi)}{(2\pi\xi)^4\kappa}$$

PROBLEMAS

1. Utiliza el método de las características para resolver los siguientes apartados:

(a) **(1.5 Ptos.)** Obtén la solución del problema:

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha u_x(x,y) + \cos\left(2u(x,y)\right) u_y(x,y) = \pi, & x,y\in\mathbb{R} \\ u(x,x) = x, & x>0 \end{array}\right\}$$

siendo $\alpha > 1$.

(b) **(1 Pto.)** Calcula el intervalo temporal en el que está definida la solución de:

$$\left.\begin{array}{ll} (1-\varepsilon t)\, u_t(t,x) + x u_x(t,x) = 1, & t>0,\ x\in\mathbb{R} \\ u(0,x) = -x, & x\in\mathbb{R} \end{array}\right\}$$

con $\varepsilon > 0$ constante.

2. **(2.5 Ptos.)** Utiliza la transformada de Laplace para obtener la solución acotada de la siguiente ecuación de ondas en una semirrecta:

$$\left.\begin{array}{ll} u_{tt}(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x) + \delta(t-1)\cos(x), & t,x>0 \\ u(t,0) = \operatorname{sen}(1+t^2), & t>0 \\ u(0,x) = u_t(0,x) = 0, & x>0 \end{array}\right\}$$

siendo δ la función impulso de Dirac.

3. **(2.5 Ptos.)** Consideremos el problema de transmisión del calor en una barra acotada, modelado por la ecuación,

$$u_t(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x), \quad 0<t,\ 0<x<\ell \qquad \text{(Ec)}$$

Al tener en cuenta la *ley de enfriamiento de Newton* sobre los extremos de la barra, suponiendo que la temperatura en el exterior de la misma es constante e igual a cero, se obtienen las siguientes condiciones de contorno de tipo Robin

$$u(t,0) + u_x(t,0) = 0, \quad u(t,\ell) + u_x(t,\ell) = 0, \quad 0<t \qquad \text{(Cc)}$$

(a) Aplica el método de separación de variables para resolver la ecuación (Ec), teniendo en cuenta las condiciones de contorno (Cc).

(b) Escribe el problema de Sturm-Liouville resultante para la función asociada a la variable espacial $X(x)$ y obtén sus autovalores y autofunciones.

(c) Dada una función $u_0 \in L^2(0,\ell)$, determina el valor de la solución formal del problema (Ec)-(Cc) para la condición inicial,

$$u(0,x) = u_0(x), \quad 0<x<\ell$$

4. **(2.5 Ptos.)** Consideremos un problema de transmisión de calor por conducción en un disco de centro cero y radio uno $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\right\}$. Esta situación se modeliza mediante la ecuación en derivadas parciales

$$u_t(t,x,y) = u_{xx}(t,x,y) + u_{yy}(t,x,y), \quad t>0,\ (x,y)\in D \qquad (1)$$

junto con la condición de contorno de tipo Neumann

$$\nabla u \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre }]0, +\infty[\times \partial D \tag{2}$$

que indica que el recinto D está aislado, siendo $\mathbf{n}$ el vector normal unitario en cada punto de la frontera de D. Obtén la solución formal del problema (1)-(2) para la distribución inicial de temperaturas

$$u(0, x, y) = \begin{cases} 1, & x^2 + y^2 < \frac{1}{4} \\ 0, & \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 < 1 \end{cases}$$

Ayuda: Si $\{\mu_{nm}\}_{m=1}^{\infty} \subset]0, +\infty[$ es la sucesión de las soluciones positivas de la ecuación

$$\xi J_n'(\xi) = 0$$

se tiene entonces que las funciones $\psi_{nm}(r) = J_n(\mu_{nm} r)$ son una base ortogonal del espacio $L^2_\omega(0, 1)$, con $\omega(r) = r$, de forma que

$$\|\psi\|^2_{L^2_\omega} = \frac{\left(\mu_{nm}^2 - n^2\right) J_n(\mu_{nm})^2}{2\mu_{nm}^2}$$

$\boxed{\text{Indicaciones}}$

- Deben responderse **todas** las preguntas de la parte de teoría y cuestiones.
- De los cuatro problemas propuestos deben **elegirse tres**.
- La duración del examen es de **4 horas**.
