Departamento de
Matemática Aplicada y
Estadística

Ingeniero Industrial
Curso 2001/02
Transformadas Integrales y Ecuaciones en Derivadas Parciales

TEORÍA Y CUESTIONES

1. Sea $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base ortonormal de funciones del espacio $L^2([0,\pi])$. Indica, **justificando la respuesta**, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   (a) **(0.5 Ptos.)** Se verifica la igualdad:
   $$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x^2)\phi_n(x)\,dx = 1$$

   (b) **(0.5 Ptos.)** Se tiene que:
   $$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} \phi_n(x)\,dx = 0$$
   Ayuda: La función constante igual a uno pertenece a $L^2([0,\pi])$

   (c) **(0.5 Ptos.)** Si
   $$\int_0^{\pi} f(x)\phi_n(x)\,dx = 0, \qquad \forall\, n\geq 1$$
   entonces
   $$\int_0^{\pi} f(x)g(x)\,dx = 0$$
   para cada $g\in L^2([0,\pi])$.

   (d) **(0.5 Ptos.)** Se verifica que
   $$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x^2)\phi_n(x)\,dx = 0$$
   para cada $n\geq 1$.

2. **(0.75 Ptos.)** Sea $I\subset \mathbb{R}$ un intervalo. Define el concepto de distribución sobre I e indica qué se entiende por derivada distribucional.

3. **(0.75 Ptos.)** Sea la función
   $$f(x)=\begin{cases} 1+x, & \text{si } -1\leq x\leq 0\\ 1-x, & \text{si } 0<x\leq 1\end{cases}$$
   Calcula su derivada en el sentido distribucional.

4. **(0.5 Ptos.)** Demuestra que la función f de la cuestión anterior pertenece al espacio de Sobolev $H_0^1(-1,1)$.

PROBLEMAS

1. **(2 Ptos.)** Determina la solución de la ecuación lineal

$$yu_x(x,y,z) - xu_y(x,y,z) + u_z(x,y,z) = 0$$

de forma que $u = u_0$ sobre los puntos de la superficie

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z > 0\}$$

donde $u_0(x,y,z) = x$.

2. Consideremos un problema de transmisión de calor en una barra unidimensional aislada en los extremos sobre la que se tiene una fuente de calor cuya intensidad depende linealmente de la temperatura,

$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) + \beta u(t,x), & 0 < t,\ 0 < x < \ell \\ u_x(t,0) = u_x(t,\ell) = 0, & 0 < t \end{array}\right\} \qquad (\heartsuit)$$

(a) **(1.5 Ptos.)** Resuelve el problema anterior suponiendo que inicialmente la distribución de temperatura sobre la barra viene dada por una función u_0, es decir, se verifica la condición inicial:

$$u(0,x) = u_0(x), \quad 0 < x < \ell \qquad (\diamondsuit)$$

(b) **(0.5 Ptos.)** Suponiendo que u_0 es constante, calcula el valor del límite

$$\lim_{t\to\infty} u(t,x)$$

para cada $0 < x < \ell$, en función de la constante β. Interpreta el resultado en términos físicos.

3. **(2 Ptos.)** Utiliza la transformada de Laplace para resolver el siguiente problema para la ecuación lineal del transporte:

$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x) + (1+x)u_x(t,x) + u(t,x) = 0, & t,x > 0 \\ u(0,x) = 0, & x > 0 \\ u(t,0) = \phi(t), & t > 0 \end{array}\right\}$$

siendo $a > 0$ una constante y

$$\phi(t) = \begin{cases} t, & t < a \\ a, & t \geq a \end{cases}$$

4. Dada una función $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, se define *formalmente* su transformada de Fourier seno como

$$U_s(f)(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{sen}(\xi x)\,dx, \qquad \xi > 0$$

(a) **(1 Pto.)** Comprueba que si f es una función de clase C^2 verificando las condiciones

(i) $\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

(ii) $f(0) = 0$

entonces se tiene que:

$$U_s(f'')(\xi) = \xi^2 U_s(f)(\xi) \qquad (\spadesuit)$$

(b) **(1 Pto.)** Dado el siguiente problema para la ecuación de Laplace en una banda:

$$\left.\begin{array}{ll} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, & 0 < x < +\infty,\ 0 < y < 1 \\ u(x,0) = f(x), \quad u(x,1) = 0, & 0 < x < +\infty \\ u(0,y) = 0, \quad \lim\limits_{x\to\infty} u(x,y) = \lim\limits_{x\to\infty} u_x(x,y) = 0, & 0 < y < 1 \end{array}\right\}$$

Utiliza la transformada de Fourier seno y la fórmula ($\spadesuit$) para probar que

$$U_s(\xi, y) = F_s(\xi) \frac{\cosh(\xi y) \operatorname{senh} \xi - \cosh \xi}{\operatorname{senh} \xi}$$

donde $F_s(\xi)$ es la transformada de Fourier seno de la función f.

INDICACIONES

- Deben responderse **todas** las preguntas de la parte de teoría y cuestiones.
- De los cuatro problemas propuestos deben **elegirse tres**.
- La duración del examen es de **4** horas.
