Departamento de
Matemática Aplicada y
Estadística

Ingeniero Industrial. Curso 00/01
Transformadas Integrales y Ecuaciones en Derivadas Parciales
Convocatoria de diciembre del 2001

TEORÍA Y CUESTIONES

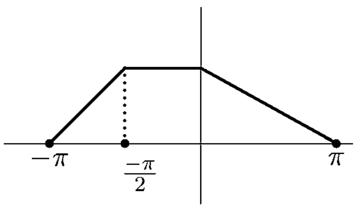
1. Indica, justificando la respuesta, si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas:

   (a) **(0.5 Ptos.)** La solución del problema:

$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x), & 0 < t,\ 0 < x < \ell \\ u(0,x) = u_0, & 0 < x < \ell \\ u_x(t,0) = u_x(t,\ell) = 0, & t > 0 \end{array}\right\}$$

   con $u_0 \in \mathbb{R}$ constante, verifica que $u(1/2, x) = u_0/2$ para cada $0 < x < \ell$.
   (**Ayuda:** Ten en cuenta que la ecuación del calor con condiciones iniciales y de contorno de tipo Neumann tiene solución única).

   (b) **(0.5 Ptos.)** La serie de Fourier de la función 2π-periódica f, cuya gráfica se muestra en la figura siguiente converge uniformemente en el intervalo compacto $[-\pi, \pi]$.



   (c) **(0.5 Ptos.)** Sean $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ los coeficientes de la serie de Fourier de la extensión impar de la función $g(x) = 1 + x^2$. Se verifica la relación,

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \pi$$

2. **(1 Pto.)**

PROBLEMAS

1. **(2.5 Ptos.)** Resuelve mediante el método de las características la siguiente ecuación cuasilineal asociada a modelos de ondas de choque (shock-waves):

$$u_t(t,x) + \cos\left(u(t,x)\right) u_x(t,x) = \beta, \qquad t > 0,\ x > 0$$

   con la condición inicial:

$$u(0,x) = h(x), \qquad x > 0$$

   siendo $h : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función inyectiva.

2. **(2.5 Ptos.)** Resuelve el problema de transmisión de calor en una barra acotada sobre la que actúa una fuente de calor, modelado por la ecuación:

$$u_t(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x) + \operatorname{sen}(mx), \qquad 0 < t,\ 0 < x < \pi \tag{Ec}$$

con m un número natural constante. Sobre la barra supondremos que inicialmente se encuentra a temperatura constante:

$$u(0,x) = u_0, \qquad 0 < x < \pi \tag{CI}$$

y que está aislada en los extremos:

$$u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0, \qquad t > 0 \tag{CC}$$

3. **(2.5 Ptos.)** Estudia el problema de difusión de calor en el recinto circular

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2\right\}$$

suponiendo que la temperatura inicial es conocida y que sobre el borde se satisface la ley de Fourier, esto es, obtén la solución formal del siguiente problema, escrito en polares:

$$\left.\begin{array}{l} u_t(t,r,\theta) = c^2\left(u_{rr}(t,r,\theta) + r^{-1}u_r(t,r,\theta) + r^{-2}u_{\theta\theta}(t,r,\theta)\right) \\ u(0,r,\theta) = g(r,\theta), \\ u(t,R,\theta) + u_r(t,R,\theta) = 0 \end{array}\right\}$$

con $t > 0$, $0 \leq r < R$ y $0 < \theta < 2\pi$.

4. **(2.5 Ptos.)** Sabiendo que la transformada de Laplace de la delta de Dirac (que denotamos por $\delta = \delta(t)$) es 1, es decir, $\mathcal{L}(\delta) = 1$, calcula la solución del problema:

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{di}{dt}(t) + 6\,i(t) + 5\displaystyle\int_0^t i(s)\,ds = \delta(t), & t > 0 \\ i(0) = 0 & \end{array}\right\}$$

que corresponde al modelo matemático para un circuito de tipo RCL, donde $L = 1$, $R = 6$ y $C = 1/5$ en sus respectivas unidades físicas que, para que el modelo sea realista, serán milihenrios para la inductancia L, ohmios para la resistencia R y microfaradios para C. La incógnita del problema, $i(t)$ representa la intensidad de corriente del circuito.

INDICACIONES

- Deben responderse **todas** las preguntas de la parte de teoría y cuestiones.
- De los cuatro problemas propuestos deben **elegirse tres**.
- La duración del examen es de **4** horas.