Departamento de
Matemática Aplicada y
Estadística

Ingeniero Industrial. Curso 00/01
Transformadas Integrales y Ecuaciones en Derivadas Parciales
Convocatoria de septiembre del 2001

TEORÍA Y CUESTIONES

1. **(1 Pto.)** Desarrolla el modelo matemático que describe el movimiento de vibración transversal de una cuerda elástica de longitud $\ell > 0$, cuyo extremo de la izquierda está fijo, mientras que el de la derecha ($x = \ell$) se mueve siguiendo la ecuación $u(t, \ell) = \mathrm{sen}(\omega t)$, $\omega \in \mathbb{R}$. Supón además que es posible determinar la posición y la velocidad de cada punto de la cuerda en el instante inicial. Explica el significado físico de cada elemento.

2. Indica, justificando la respuesta, si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas:

   (a) **(0.5 Ptos.)** Existe una función continua $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, de forma que $f(0) = 1 + \pi^2$ y verifica las igualdades,
   $$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)\,dx = 0, \quad \forall\, n \geq 1.$$

   (b) **(0.5 Ptos.)** Dada la función,
   $$f(x) = \begin{cases} x & -\pi < x \leq 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$$
   extendida a todo $\mathbb{R}$ como 2π-periódica, ¿puede ser su serie de Fourier uniformemente convergente en el intervalo $[-\pi, \pi]$? ¿Por qué?

   (c) **(0.5 Ptos.)** Dada la función $g(x) = \mathrm{sen}(x^2)$, se verifica la igualdad
   $$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} g^2(x)\,dx &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx\right)^2 + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}(nx)g(x)\,dx\right)^2 \\ &+ \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)g(x)\,dx\right)^2\end{aligned}$$

3. **(1.5 Ptos.)** Dados $\nu, \mu \in \mathbb{R}$, consideremos el siguiente problema de Sturm-Liouville:
   $$\left.\begin{aligned} &-\left(xu'(x)\right)' + \tfrac{\nu^2}{x}u(x) = \mu^2 x u(x), \quad a < x < b, \\ &u(a) = u(b) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(S-L)}$$
   con $a > 0$.

   (a) ¿Se trata de un problema **regular** o **singular**? ¿Por qué?

   (b) Comprueba que los autovalores de (S-L) son los números μ^2 que satisfacen la relación
   $$J_\nu(\mu a)Y_\nu(\mu b) = J_\nu(\mu b)Y_\nu(\mu a)$$
   donde J_ν e Y_ν son las funciones de Bessel de primera y segunda especie, respectivamente.

   (c) ¿Cuáles son las autofunciones del problema?

PROBLEMAS

1. **(2 Ptos.)** Utiliza el método de las características para resolver el siguiente problema de contorno asociado a una ecuación cuasilineal de primer orden,

$$\left.\begin{array}{l} u_t(t,x) + u(t,x)u_x(t,x) = \alpha u(t,x) + 1 \\ u(t,0) = \beta, \quad (\beta \in \mathbb{R}) \end{array}\right\}$$

siendo $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. **(2 Ptos.)** Consideremos el problema de transmisión del calor en una barra acotada, modelado por la ecuación,

$$u_t(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x), \quad 0 < t, \ 0 < x < \ell. \tag{Ec}$$

Sobre la barra supondremos que el extremo de la izquierda se mantiene a temperatura constante, lo que nos da la condición de contorno,

$$u(t,0) = u_0, \quad t > 0 \tag{C1}$$

mientras que por la derecha está aislada,

$$u_x(t,\ell) = 0, \quad t > 0 \tag{C2}$$

   (a) Aplica el método de separación de variables para resolver la ecuación (Ec), teniendo en cuenta las condiciones de contorno (C1) y (C2).

   (b) Escribe el problema de Sturm-Liouville resultante para la función asociada a la variable espacial $X(x)$ y obtén sus autovalores y autofunciones.

   (c) Dada una función $g \in L^2([0,\ell])$, determina el valor de la solución formal del problema (Ec)-(C1)-(C2) para la condición inicial,

$$u(0,x) = g(x), \quad 0 < x < \ell$$

3. Fijados $t_0 > 0$ y $0 < \varepsilon < t_0$, consideremos la función $f_{t_0,\varepsilon}$ definida como

$$\begin{array}{rccl} f_{t_0,\varepsilon}: & [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \rightsquigarrow & f_{t_0,\varepsilon}(t) = \left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{2\varepsilon} & \text{si } t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon \\ 0 & \text{en otro caso} \end{array}\right. \end{array}$$

   (a) **(0.25 Ptos.)** Comprueba que $f_{t_0,\varepsilon}$ converge puntualmente, cuando $\varepsilon \to 0$, a la delta de Dirac centrada en t_0, es decir,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f_{t_0,\varepsilon}(t) = \left\{\begin{array}{ll} \infty & \text{si } t = t_0 \\ 0 & \text{si } t \neq t_0 \end{array}\right.$$

   (b) **(0.75 Ptos.)** Calcula la transformada de Laplace de la función $f_{t_0,\varepsilon}$, que denotamos por $\mathcal{L}(f_{t_0,\varepsilon})$, y comprueba que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{L}(f_{t_0,\varepsilon})(s) = e^{-t_0 s}, \quad \forall\, s > 0.$$

   Por ello se dice que la transformada de Laplace de la delta de Dirac centrada en t_0 es igual a $e^{-t_0 s}$, esto es,

$$\mathcal{L}(\delta_{t_0})(s) = e^{-t_0 s}, \quad \forall\, s > 0.$$

(c) **(1 Pto.)** Utiliza los resultados de los apartados anteriores para resolver el siguiente problema de condiciones iniciales:

$$\left.\begin{array}{ll} y''(t) - 2y(t) = \delta_\pi(t), & t > 0 \\ y(0) = y'(0) = 0. & \end{array}\right\}$$

4. Consideremos el siguiente problema para la ecuación de ondas:

$$\left.\begin{array}{ll} u_{tt}(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x), & t > 0,\ -\infty < x < \infty \\ u(0,x) = f(x), \quad u_t(0,x) = 0, & -\infty < x < \infty \end{array}\right\}$$

Se pide:

(a) **(1 Pto.)** Utiliza formalmente el método de la transformada de Fourier para probar que la solución del problema transformado es

$$\widehat{u}(t,\xi) = \widehat{f}(\xi)\cos(ct\xi)$$

(b) **(1 Pto.)** Utiliza las propiedades de la transformada de Fourier para obtener la transformada inversa de Fourier de la función anterior.

INDICACIONES

- Deben responderse **todas** las preguntas de la parte de teoría y cuestiones.
- De los cuatro problemas propuestos deben **elegirse tres**.
- La duración del examen es de **4** horas.
