

Capítulo 6

Aplicación del Método de Separación de Variables a la Resolución de EDPs

En los capítulos anteriores hemos desarrollado todas las herramientas necesarias para poder aplicar el método de separación de variables a la resolución de ciertas EDPs. De ello nos ocuparemos en este capítulo, donde consideraremos las ecuaciones del calor y ondas con una sola variable espacial, y la ecuación de Laplace en dimensión dos.

6.1 La Ecuación del Calor 1-dimensional

Consideremos el problema de la difusión de calor en una barra acotada. Como vimos en el primer capítulo, el modelo matemático para este fenómeno físico es

$$(EC) \begin{cases} u_t(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x) & t > 0, 0 < x < l, \\ u(0, x) = f(x) & 0 \leq x \leq l \\ u(t, 0) = u(t, l) = 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

y por el método de separación de variables obtuvimos la solución formal

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (6.1)$$

donde además se tenía que verificar que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (6.2)$$

con

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

En aquel momento quedaron pendientes algunas preguntas que trataremos de responder ahora. La primera de ellas es:

¿Puede la temperatura inicial f ser expresada en la forma (6.2)?

La respuesta es **Si**. Si exigimos a f que sea *continua y diferenciable a trozos* en $[0, l]$ y que $f(0) = f(l)$, por el Teorema 4.2.1 se tiene que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad \forall x \in [0, l].$$

La segunda pregunta es:

¿Es u una solución clásica?

La respuesta vuelve a ser **Si**. La justificación es un poco laboriosa pero en cualquier caso la esbozamos a continuación.

Supuesta $f \in L^2$ ó f continua y diferenciable a trozos, los coeficientes de Fourier de f satisfacen que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

y por tanto existe una constante $C > 0$ tal que

$$|b_n| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(Lo único que estamos diciendo es que toda sucesión convergente es acotada). Por tanto, se tiene la estimación

$$\left| b_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l} \right| \leq C e^{-\delta n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, l] \text{ y } \forall t \geq \varepsilon,$$

siendo $\delta = \frac{\pi^2 a^2 \varepsilon}{l^2}$. Dado que la serie numérica

$$\sum_{n \geq 0} e^{-\delta n^2}$$

es convergente, por el criterio de Mayoración de Weierstrass se tiene que la serie (6.1) converge uniformemente en conjuntos de la forma $[\varepsilon, T] \times [0, l]$ y además, como las funciones $e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l}$ son continuas, la función suma también lo es, es decir, u es continua en $]0, \infty[\times [0, l]$.

El propio criterio de Mayoración de Weierstrass y el teorema de derivación de series de funciones nos aseguran (razonando como lo hemos hecho hasta ahora) que la serie (6.1) se puede derivar término a término y que además $u \in C^2(]0, \infty[\times [0, l])$. Como las funciones $b_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l}$ satisfacen la ecuación del calor, u también la satisface (gracias a la derivación término a término).

Sólo nos queda ver que se satisfacen las condiciones iniciales y de contorno. Como la serie (6.1) converge uniformemente para $x \in [0, l]$, la función u , considerada como función dependiente de x , es continua y por tanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} u(t, x) = \lim_{x \rightarrow l} u(t, x) = u(t, 0) = u(t, l) = 0.$$

Finalmente, si f es continua, diferenciable a trozos y si $f(0) = f(l) = 0$, la extensión impar de f es continua y diferenciable a trozos con lo cual, por el Teorema 4.2.2 se satisface que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty.$$

Dado que

$$\left| b_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l} \right| \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, l] \text{ y } \forall t \geq 0,$$

de nuevo el criterio de Weierstrass nos asegura que la serie (6.1) converge uniformemente en $[0, \infty[\times [0, l]$ lo que nos permite asegurar que $u \in C([0, \infty[\times [0, l])$. En particular,

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(t, x) = u(0, x) = f(x).$$

Por tanto, acabamos de probar el siguiente:

Teorema 6.1.1 (Existencia de solución clásica para la ecuación del calor) Supongamos que f sea continua, diferenciable a trozos en $[0, l]$ y que $f(0) = f(l) = 0$. Entonces la función dada en (6.1) es solución clásica de (EC).

Nota 6.1.1 Nótese que la hipótesis $f(0) = f(l) = 0$ es una condición de compatibilidad necesaria entre las condiciones de contorno y la condición inicial.

Aún quedan dos cuestiones por analizar referentes a la ecuación del calor: unicidad y estabilidad de la solución. Para abordar ambas cuestiones necesitaremos el siguiente:

Lema 6.1.2 (Principio del máximo y mínimo para la ecuación del calor) Sean $l, T > 0$, $D = [0, T] \times [0, l]$ y

$$L = \{(t, x) : x \in [0, l], t = 0\} \cup \{(t, x) : t \in [0, T], x = 0\} \cup \{(t, x) : t \in [0, T], x = l\}.$$

Si $u \in C^2(D \setminus L) \cap C(D)$ es solución de la ecuación del calor $u_t = a^2 u_{xx}$ en $D \setminus L$, entonces

$$\max_D u = \max_L u \quad \text{y} \quad \min_D u = \min_L u.$$

Pongamos $M = \max_D u$ y $m = \min_D u$. Obviamente $M \geq m$. Supongamos que $M > m$. Entonces existe $(t_0, x_0) \in D \setminus L$ tal que $u(t_0, x_0) = M$. Consideremos la función

$$v(t, x) = u(t, x) + \frac{M - m}{2l^2} (x - x_0)^2.$$

En L se verifica que $v(t, x) \leq m + \frac{M - m}{2l^2} l^2 < M$. Por otra parte, $v(t_0, x_0) = u(t_0, x_0) = M$ y por tanto, el máximo de v es mayor o igual que M . Sea (t_1, x_1) el punto donde v alcanza su máximo. Por lo que hemos visto, $(t_1, x_1) \notin L$. Si (t_1, x_1) está en el interior de D , entonces

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t_1, x_1) = \frac{\partial v}{\partial x}(t_1, x_1) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t_1, x_1) \leq 0.$$

Si $(t_1, x_1) \in \{T\} \times]0, l[$, entonces

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t_1, x_1) \geq 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(t_1, x_1) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t_1, x_1) \leq 0.$$

En definitiva, $\frac{\partial v}{\partial t}(t_1, x_1) - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t_1, x_1) \geq 0$. Sin embargo, teniendo en cuenta la definición de v y que u es solución de la ecuación del calor se tiene que $\frac{\partial v}{\partial t}(t_1, x_1) - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t_1, x_1) = -\frac{a^2}{l^2} (M - m) < 0$ lo cual es una contradicción. Por tanto, $M = m$. La segunda igualdad se deduce ahora de la primera ya que

$$\min_D u = -\max_D (-u) = -\max_L (-u) = \min_L u.$$

■

Teorema 6.1.3 (Unicidad de Solución Clásica) Sean l, T, D y L como en el lema anterior. Sean u_1 y u_2 dos soluciones clásicas de (EC). Entonces $u_1 = u_2$.

La demostración es una consecuencia inmediata del lema anterior. En efecto: consideremos la función $u = u_1 - u_2$ que, por hipótesis, se anula en L . Por el principio del máximo y mínimo tenemos

$$\max_D u = \max_L u = 0 \quad \text{y} \quad \min_D u = \min_L u = 0.$$

Por tanto, $u = 0$ en D , esto es, $u_1 = u_2$. ■

Teorema 6.1.4 (Estabilidad de la Solución) Sean l, T, D y L como en el lema anterior. Sean $g_1, g_2 \in C([0, l])$ y $h_1, h_2, k_1, k_2 \in C([0, T])$ tales que

$$|g_1(x) - g_2(x)| \leq \varepsilon \quad \text{en } [0, l],$$

$$|h_1(t) - h_2(t)| \leq \varepsilon \quad \text{en } [0, T]$$

y

$$|k_1(t) - k_2(t)| \leq \varepsilon \quad \text{en } [0, T].$$

Sean u_1 y u_2 dos soluciones clásicas de la ecuación del calor verificando las condiciones:

$$\begin{cases} u_1(0, x) = g_1(x) & , & u_2(0, x) = g_2(x) & \text{con } x \in [0, l] \\ u_1(t, 0) = h_1(t) & , & u_2(t, 0) = h_2(t) & \text{con } t \in [0, T] \\ u_1(t, l) = k_1(t) & , & u_2(t, l) = k_2(t) & \text{con } t \in [0, T] \end{cases} .$$

Entonces

$$|u_1(t, x) - u_2(t, x)| \leq \varepsilon \quad \forall (t, x) \in D.$$

De nuevo la demostración es consecuencia del principio del máximo y mínimo ya que por hipótesis y por dicho principio se verifica en todo D que

$$-\varepsilon \leq \min_L (u_1 - u_2) = \min_D (u_1 - u_2) \leq u_1(t, x) - u_2(t, x) \leq \max_D (u_1 - u_2) = \max_L (u_1 - u_2) \leq \varepsilon.$$

■

Nos ocuparemos finalmente de la física del problema. Consideremos la función $f(x) = \sin(\pi x) - \frac{1}{3} \sin(2\pi x)$, cuya gráfica se muestra a continuación.

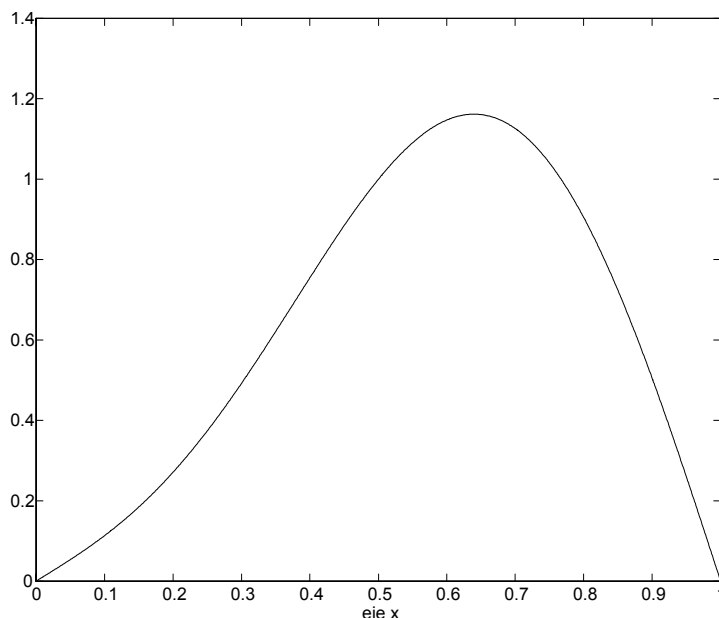


Figura 6.1: Gráfica de $f(x) = \sin(\pi x) - \frac{1}{3} \sin(2\pi x)$.

Se muestra a continuación la gráfica de la solución del problema

$$(DC) \begin{cases} u_t(t, x) = \frac{1}{4}u_{xx}(t, x) & t > 0, 0 < x < 1, \\ u(0, x) = \sin(\pi x) - \frac{1}{3}\sin(2\pi x) & 0 \leq x \leq 1 \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

Se observa que la temperatura va rápidamente a cero y que además u es muy suave. Se produce por tanto un enfriamiento suave y rápido de la barra.

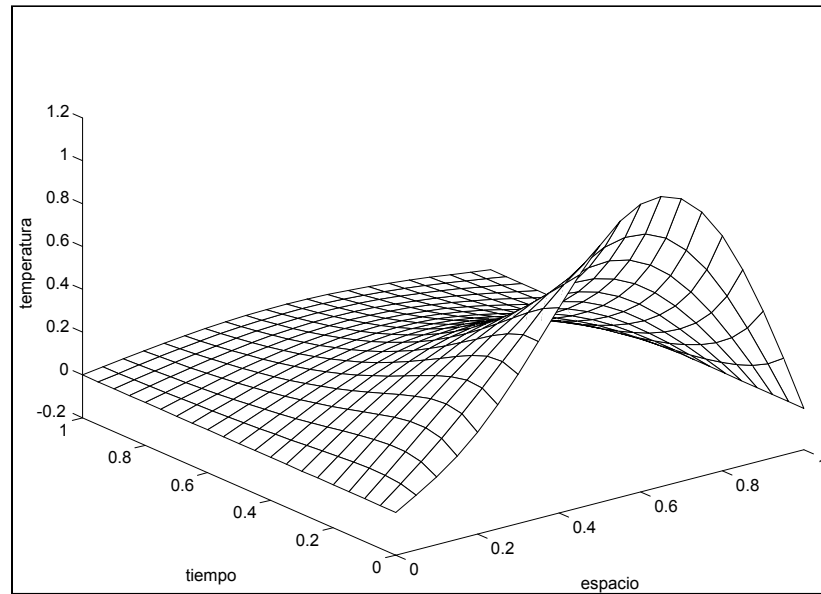


Figura 6.2: Gráfica de la solución del problema de difusión de calor (DC).

6.1.1 La ecuación del calor no homogénea

Consideremos el problema no homogéneo para la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x) + F(t, x), & t > 0 \text{ y } 0 < x < l \\ u(0, x) = f(x), & 0 < x < l \\ u(t, 0) = u(t, l) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad (6.3)$$

Buscamos una solución que se pueda escribir en la forma

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

ya que las autofunciones del problema homogéneo son las funciones $u_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$. Supongamos que las funciones $f(x)$ y $F(t, x)$ se pueden desarrollar en la forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad \text{y} \quad F(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

donde

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(s) \sin \frac{n\pi s}{l} ds \quad \text{y} \quad b_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l F(s, t) \sin \frac{n\pi s}{l} ds.$$

Sustituyendo todas estas expresiones en la ecuación del calor se obtiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(u'_n(t) + \left(\frac{n\pi a}{l} \right)^2 u_n(t) \right) \sin \frac{n\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

y por tanto,

$$u'_n(t) + \left(\frac{n\pi a}{l} \right)^2 u_n(t) = b_n(t) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por otra parte, de la condición inicial $u(0, x) = f(x)$ se obtiene que $u_n(0) = a_n \forall n \in \mathbb{N}$. Con todo ello, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene el problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'_n(t) + \left(\frac{n\pi a}{l} \right)^2 u_n(t) = b_n(t) \\ u_n(0) = a_n \end{cases}$$

cuya solución es

$$u_n(t) = a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l} \right)^2 t} + \int_0^t b_n(s) e^{-\left(\frac{n\pi a}{l} \right)^2 (t-s)} ds$$

y sustituyendo este valor en $u(t, x)$ obtenemos la solución formal

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l} \right)^2 t} + \int_0^t b_n(s) e^{-\left(\frac{n\pi a}{l} \right)^2 (t-s)} ds \right\} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

6.1.2 La ecuación del calor con condiciones de frontera no homogéneas

Consideremos el siguiente problema para la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x) + F(t, x), & t > 0 \text{ y } 0 < x < l \\ u(0, x) = f(x), & 0 < x < l \\ u(t, 0) = h_1(t), \quad u(t, l) = h_2(t), & t > 0 \end{cases}$$

Sea $v(t, x) = h_1(t) + \frac{x}{l} [h_2(t) - h_1(t)]$. Entonces la función $z(t, x) = u(t, x) - v(t, x)$ es solución del problema con condiciones homogéneas

$$\begin{cases} z_t(t, x) = a^2 z_{xx}(t, x) + F(t, x) - h'_1(t) - \frac{x}{l} [h'_2(t) - h'_1(t)], & t > 0 \text{ y } 0 < x < l \\ z(0, x) = f(x) - h_1(0) - \frac{x}{l} [h_2(0) - h_1(0)], & 0 < x < l \\ z(t, 0) = 0, \quad z(t, l) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

que es del tipo (6.3). Nótese que una vez calculada la función z , es conocida la función u solución de nuestro problema inicial.

La forma de proceder en este tipo de problemas será siempre la misma: transformar las condiciones de contorno no homogéneas en homogéneas mediante un cambio de variable adecuado.

6.2 La Ecuación de Ondas 1-dimensional

Consideremos el problema de la vibración de una cuerda de longitud finita l , sobre la que no actúa ninguna fuerza externa. Supongamos que en el instante inicial $t = 0$ la cuerda tiene una forma dada por la función $f(x)$ y cada uno de sus puntos posee una velocidad representada por $g(x)$. Finalmente supongamos que la cuerda permanece fija en sus extremos. Las oscilaciones

transversales de la cuerda pueden ser representadas por una función $u(t, x)$ que tal y como vimos en el primer capítulo satisface la ecuación y las condiciones iniciales y de contorno

$$(EO) \begin{cases} u_{tt}(t, x) = c^2 u_{xx}(t, x) & t \geq 0, 0 < x < l \\ u(0, x) = f(x) ; u_t(0, x) = g(x) & 0 \leq x \leq l \\ u(t, 0) = u(t, l) = 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

Aplicaremos el método de separación de variables para obtener la solución formal de (EO). Como siempre, suponemos que la solución se puede escribir en la forma $u(t, x) = T(t)X(x)$. Al derivar y sustituir en la ecuación de ondas obtenemos las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias para $T(t)$ y $X(x)$

$$X''(x) = -\lambda X(x) \quad (6.4)$$

y

$$T''(t) + \lambda c^2 T(t) = 0. \quad (6.5)$$

Las condiciones de frontera forman junto con la ecuación (6.4) el siguiente problema regular de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

el cual admite como autovalores $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ y como autofunciones $u_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$.

Sustituyendo estos valores de λ_n en (6.5) se tiene que

$$T''(t) + \left(\frac{n\pi c}{l}\right)^2 T(t) = 0 \quad \text{para cada } n = 1, 2, 3, \dots$$

La solución general de esta ecuación es

$$T(t) = a_n \cos \frac{n\pi ct}{l} + b_n \sin \frac{n\pi ct}{l}.$$

La solución formal de (EO) es entonces

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi ct}{l} + b_n \sin \frac{n\pi ct}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (6.6)$$

Al imponer las condiciones iniciales $u(0, x) = f(x)$ y $u_t(0, x) = g(x)$ se obtiene

$$u(0, x) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

y

$$u_t(0, x) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Por tanto, a_n es el n -ésimo coeficiente de Fourier de la función f , mientras que $\frac{n\pi c}{l} b_n$ es el n -ésimo coeficiente de Fourier de la función g , es decir,

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

y

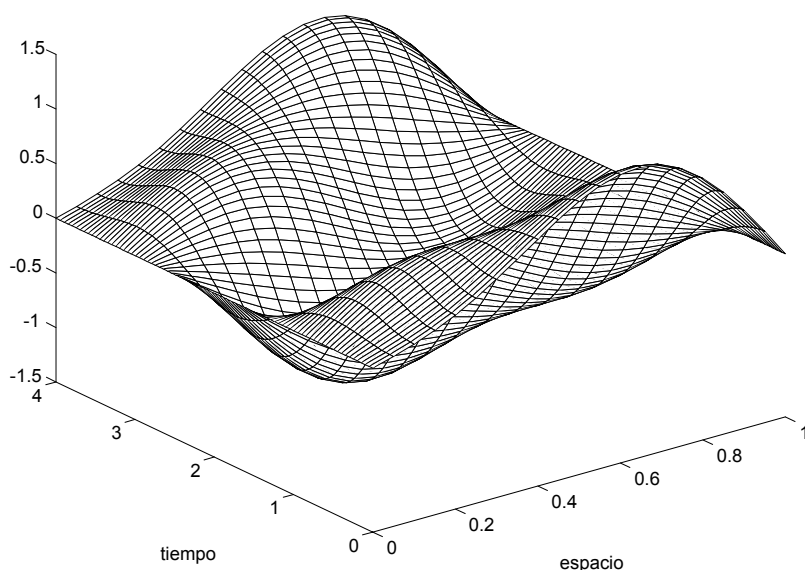
$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

Sustituyendo estas expresiones en (6.6) obtenemos la solución formal del problema (EO).

La gráfica que se muestra a continuación se corresponde con la solución del problema de ondas

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) = \frac{1}{4}u_{xx}(t, x), & t > 0, 0 < x < 1 \\ u(0, x) = f(x) ; u_t(0, x) = 0, & 0 < x < 1 \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

con $f(x) = \sin(\pi x) - \frac{1}{3}\sin(2\pi x)$, es decir, la misma función que hemos tomado como temperatura inicial del problema de difusión de calor considerado en la sección anterior. Se observa que mientras que la solución del problema de difusión de calor que hemos analizado en la sección anterior tiende a estabilizar la temperatura a cero (ver Figura 6.2), la solución del problema de ondas propaga en cierto sentido el perfil inicial.



Nos limitaremos a continuación a enunciar el teorema de existencia, unicidad y estabilidad de la solución del problema (EO). La demostración de estos resultados puede verse en [13, p.p. 419-424].

Teorema 6.2.1 (Existencia, Unicidad y Estabilidad de Solución) *Si $f \in C^2([0, l])$, admite derivada tercera continua a trozos en $[0, l]$ y $f(0) = f(l) = f''(0) = f''(l) = 0$ y si $g \in C^1([0, l])$ admite derivada segunda continua a trozos y $g(0) = g(l) = 0$, entonces (6.6) es la única solución del problema (EO). Además, esta solución es estable respecto de los datos iniciales, es decir, pequeñas variaciones en las funciones f y g originan pequeñas variaciones en la solución.*

La misma técnica descrita en la sección anterior para resolver la ecuación del calor no homogénea y con condiciones de frontera no homogéneas es igualmente válida para resolver la ecuación de ondas no homogénea y con condiciones de frontera no homogéneas. Ilustraremos esta técnica con el problema de ondas

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & t > 0, 0 < x < 1 \\ u(0, x) = u_t(0, x) = 0, & 0 < x < 1 \\ u(t, 0) = t^2 ; u(t, 1) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

Puesto que se trata de un problema con condiciones no homogéneas, construimos en primer lugar una función $v(t, x)$ que las verifique. Para ello basta tomar

$$v(t, x) = (1 - x)t^2.$$

Efectuamos ahora el cambio $u(t, x) = z(t, x) + v(t, x)$. La función $z(t, x)$ ha de ser solución del problema homogéneo

$$\begin{cases} z_{tt} = c^2 z_{xx} - 2(1 - x), & t > 0, 0 < x < 1 \\ z(0, x) = z_t(0, x) = 0, & 0 < x < 1 \\ z(t, 0) = 0 = z(t, 1), & t > 0 \end{cases}$$

Las autofunciones correspondientes al problema homogéneo son $\{\sin n\pi x : n \in \mathbb{N}\}$. Por tanto, proponemos como solución del problema no homogéneo una función de la forma

$$z(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(t) \sin n\pi x. \quad (6.7)$$

El desarrollo en serie de Fourier senos de la función $-2(1 - x)$ es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{n\pi} \sin n\pi x \quad (6.8)$$

y sustituyendo (6.7) y (6.8) en la ecuación de ondas para z obtenemos que los coeficientes $z_n(t)$ han de verificar la ecuación y las condiciones iniciales

$$\begin{cases} z_n''(t) + (n\pi c)^2 z_n(t) = -\frac{4}{n\pi} \\ z_n(0) = 0 \\ z_n'(0) = 0 \end{cases}.$$

La solución de este problema de valores iniciales es

$$z_n(t) = \frac{4}{n^3 \pi^2 c^2} (\cos(n\pi ct) - 1)$$

y por tanto,

$$z(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^3 \pi^2 c^2} (\cos(n\pi ct) - 1) \sin n\pi x$$

con lo cual

$$u(t, x) = t^2(1 - x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^3 \pi^2 c^2} (\cos(n\pi ct) - 1) \sin n\pi x.$$

6.2.1 ¿Se Puede Escuchar la Forma de un Tambor?

En la mayoría de problemas que abordamos en este curso el esquema consiste en calcular la solución de un determinado problema de EDPs conocidos los parámetros de la ecuación y los datos iniciales y/o de contorno. Sin embargo, en algunos problemas de la vida real nos encontramos con la situación inversa, es decir, se trata de identificar los parámetros de una ecuación a través de informaciones parciales o globales sobre las soluciones que somos capaces de medir y observar experimentalmente. Tales problemas aparecen, por ejemplo, en la prospección petrolífera y en diversas aplicaciones médicas. Estudiaremos a continuación un ejemplo académico pero de gran

belleza. El problema se formula de una manera muy sencilla: ¿se puede oír la forma de un tambor?, es decir, ¿somos capaces de determinar la forma de un tambor sabiendo cómo suena dicho tambor?

Consideraremos la versión unidimensional del problema, es decir, supongamos que tenemos una cuerda de longitud L desconocida y que está sujeta en los extremos y vibrando. Supongamos también que, gracias a un sensor, podemos medir la tensión que las vibraciones de la cuerda producen en el extremo $x = 0$.

¿Podemos identificar la longitud L a través de las mediciones que el sensor proporciona de la tensión en el extremo conocido $x = 0$?

La respuesta es **Sí**. Como hemos visto en la sección anterior, la solución del problema de ondas

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) = c^2 u_{xx}(t, x) & t > 0, 0 < x < L \\ u(0, x) = f(x) ; u_t(0, x) = g(x) & 0 < x < L \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

es

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + b_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (6.9)$$

La tensión en el extremo $x = 0$ es

$$u_x(t, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} \left(a_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + b_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \right).$$

Por tanto, la tensión es una función periódica de periodo $2L/c$. De esta forma, la periodicidad de la tensión ($2L/c$) está relacionada de manera unívoca con la longitud de la cuerda L .

Para el caso dos dimensional, se ha demostrado que la respuesta es también afirmativa para el caso de tambores circulares. Sin embargo, en 1992 se encontraron ejemplos de tambores con esquinas que tenían distinta forma y que sin embargo sonaban igual. Más información sobre este bonito problema puede encontrarse en [14] y sobre todo en [27].

6.2.2 Calor *versus* Ondas: un poco más de física ... y de matemáticas

Nos ocuparemos en esta sección de estudiar algunas propiedades físicas de la ecuación de ondas y también contrastaremos dichas propiedades con sus análogas para la ecuación del calor.

La fórmula de d'Alembert para la ecuación de ondas está dada (ver ejercicios) por

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \left[f(x - ct) + f(x + ct) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(y) dy \right]. \quad (6.10)$$

Es muy fácil convencerse de que si $f \in C^2(\mathbb{R})$ y $g \in C^1(\mathbb{R})$, entonces la función dada en (6.10) es solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) = c^2 u_{xx}(t, x), & t > 0, -\infty < x < +\infty \\ u(0, x) = f(x), & -\infty < x < +\infty \\ u_t(0, x) = g(x), & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

Observemos también que con las fórmulas trigonométricas que relacionan el producto de seno-coseno y seno-seno, la fórmula de Bernoulli (6.9) se reescribe en la forma de d'Alembert

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\sin \left(\frac{n\pi}{L} (x + ct) \right) + \sin \left(\frac{n\pi}{L} (x - ct) \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2c} \sum_{n=1}^{\infty} c b_n \left[\cos \left(\frac{n\pi}{L} (x - ct) \right) - \cos \left(\frac{n\pi}{L} (x + ct) \right) \right]. \end{aligned}$$

A la vista de estas dos representaciones para la solución de la ecuación de ondas, es natural preguntarse por qué usar la fórmula de Bernoulli si disponemos de la fórmula más sencilla de d'Alembert. Hay dos razones principales que nos llevan a no desechar la representación en serie de funciones dada por la fórmula de Bernoulli:

- Por un lado, el método que usamos para obtener la fórmula de d'Alembert no es válido para otro tipo de ecuaciones, ni tan siquiera para la propia ecuación de ondas en dimensión superior a uno o al incluir condiciones de contorno.
- Por otro lado, mientras que *la fórmula de d'Alembert nos dice lo que vemos cuando miramos a una cuerda vibrando, la de Bernoulli nos dice lo que oímos cuando escuchamos la guitarra sonar*. La representación de la solución en serie de funciones descompone una onda de sonido en sus componentes de diferentes frecuencias. Usualmente, uno escucha el primer sumando de (6.9), el cual es el tono fundamental a frecuencia $(2\pi c)/L$, y junto a él el resto de tonos de menor intensidad y de frecuencia $(2n\pi c)/L$, $n > 1$.

No obstante, de la fórmula de d'Alembert también podemos extraer algunas otras consecuencias importantes. A la vista de la solución dada en (6.10), es claro que si la posición inicial de la cuerda, representada por medio de la función f , tiene alguna singularidad, entonces dicha singularidad se propaga. La ecuación de ondas no es capaz de suavizar o regularizar los datos iniciales. De hecho, a la vista de (6.10), se tiene que la solución u tiene la misma regularidad que el dato inicial f y gana una derivada respecto a g . El comportamiento de los procesos de difusión es bien distinto: la difusión de calor tiende a suavizar cualquier singularidad en los datos iniciales. En efecto, la serie de funciones mediante la cual se define la solución de la ecuación del calor contiene un término del tipo $e^{-n^2 t}$ lo que provoca que la función que esta serie define sea de clase C^∞ . Es el famoso efecto regularizante de la ecuación del calor. Este efecto regularizante implica también la irreversibilidad en tiempo de la ecuación del calor. Así, si fijamos una temperatura inicial en un tiempo $T > 0$, entonces en general no es posible integrar la ecuación $u_t = a^2 u_{xx}$ en el intervalo $[0, T]$, esto es, hacia atrás en el tiempo. Si dicha integración fuese posible, entonces debido al efecto regularizante de la ecuación del calor obtendríamos que $u(0, x)$ es una función de clase C^∞ lo cual nos indicaría que todos los datos iniciales en $t = 0$ para la ecuación del calor son funciones muy regulares. Por supuesto, en general esto no es cierto. Podemos integrar la ecuación del calor hacia adelante en el tiempo a partir de datos iniciales de hecho muy irregulares. En la ecuación de ondas, por el contrario, si cambiamos t por $T - t$ obtenemos la misma EDP y entonces si que es posible ir hacia atrás en el tiempo y averiguar el pasado de las ondas.

La energía, cinética más la potencial elástica, en el tiempo t de una cuerda elástica de longitud L que está vibrando es, salvo una constante,

$$E(t) = \int_0^L [u_t^2(t, x) + c^2 u_x^2(t, x)] dx.$$

Más adelante, en los ejercicios, veremos que esta energía se conserva con el paso del tiempo. La ecuación del calor se comporta, en este sentido, justo al revés: como hemos visto en las secciones anteriores, una barra metálica que inicialmente está a una temperatura dada tiende a enfriarse, a disipar toda su energía.

Por último, nos ocuparemos de la velocidad a la que se propagan las ondas y el calor. No es difícil comprobar, al menos formalmente, que la función

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} dy \quad (6.11)$$

es solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x), & t > 0, \quad -\infty < x < +\infty \\ u(0, x) = f(x), & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

La fórmula (6.11) nos dice que el valor de la temperatura u en cualquier instante t depende de todos los valores de $f(x)$, con $-\infty < x < +\infty$, esto es, de la temperatura en el instante inicial. Este hecho puede ser interpretado diciendo que el calor se propaga a velocidad infinita. Por su parte, la fórmula de d'Alembert (6.10) nos dice que $u(t, x)$ depende únicamente de lo que le sucede a f en los puntos $x - ct$ y $x + ct$, y a g en el intervalo $[x - ct, x + ct]$. Nos encontramos pues ante un fenómeno de propagación a velocidad finita. Este hecho tiene una gran importancia en la teoría de control exacto de sistemas gobernados por EDPs. Así, debido a la velocidad finita de propagación de las ondas, los sistemas hiperbólicos tipo la ecuación de ondas necesitan de un tiempo mínimo para poder ser controlados si actuamos únicamente sobre la frontera de los mismos. En cambio, los sistemas parabólicos tipo calor pueden ser controlados en un tiempo infinitamente pequeño actuando también únicamente sobre su frontera.

Podemos resumir gran parte de lo dicho en esta sección en el siguiente cuadro:

	Calor	Ondas
Efecto regularizante	Si	No
Reversibilidad en tiempo	No	Si
Conservación de la energía	No	Si
Velocidad de propagación	Infinita	Finita

6.3 La Ecuación de Laplace en Dimensión 2

En esta última sección nos ocuparemos del estudio de la ecuación de Laplace.

Definición 6.3.1 *Una función $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, siendo Ω un conjunto abierto, se dice armónica si es de clase $C^2(\Omega)$ y si además satisface la ecuación de Laplace*

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Nos ocuparemos en primer lugar de estudiar las propiedades de unicidad y estabilidad de solución del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace, esto es, el problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = f & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto abierto y acotado y f es una función continua.

La unicidad y estabilidad de solución para el problema anterior son ambas consecuencia del siguiente principio del máximo-mínimo.

Lema 6.3.1 (Principio del máximo y mínimo para funciones armónicas) *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y acotado, y $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ una función armónica. Entonces,*

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u \quad \text{y} \quad \min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

La demostración de este lema así como la del resultado que sigue puede encontrarse en [13, p.p. 473-475].

Teorema 6.3.2 (Unicidad y Estabilidad) Consideremos el problema

$$(P) \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = f & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto abierto y acotado, y f es una función continua. Si u_1 y u_2 son soluciones clásicas de (P), entonces $u_1 = u_2$ en $\overline{\Omega}$. Además, la solución depende de manera continua de f .

Concluimos este capítulo calculando la solución formal de la ecuación de Laplace en algunos dominios donde el método de separación de variables es aplicable.

6.3.1 La ecuación de Laplace en un rectángulo

Consideremos el problema

$$\begin{cases} u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, & 0 < x < l, 0 < y < L \\ u(0, y) = u(l, y) = 0, & 0 < y < L \\ u(x, 0) = f_1(x), u(x, L) = f_2(x), & 0 < x < l \end{cases}$$

Supongamos que la solución de este problema se puede escribir en la forma $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Derivando y sustituyendo en la ecuación de Laplace se obtiene que $X''Y + XY'' = 0$ y por tanto

$$\frac{Y''}{Y} = -\frac{X''}{X} = \lambda.$$

Al imponer las condiciones de frontera $u(0, y) = u(l, y) = 0$ se obtiene que la función $X(x)$ ha de ser solución del problema regular de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

mientras que la función Y ha de ser solución de la ecuación $Y'' - \lambda Y = 0$.

Los autovalores del anterior problema de Sturm-Liouville son $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ y las correspondientes autofunciones $X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$.

Por otra parte, la solución general de la ecuación

$$Y''(y) - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 Y(y) = 0$$

expresada en términos de las funciones seno y coseno hiperbólicos es

$$Y(y) = \alpha_n \cosh \frac{n\pi y}{l} + \beta_n \sinh \frac{n\pi y}{l}.$$

Recordemos que

$$\sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}, \quad \cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}.$$

Con todo ello se tiene que la solución formal de nuestro problema es

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \left(\alpha_n \cosh \frac{n\pi y}{l} + \beta_n \sinh \frac{n\pi y}{l} \right) \quad (6.12)$$

donde aún faltan por determinar los coeficientes α_n y β_n para que se satisfagan las condiciones de frontera $u(x, 0) = f_1(x)$ y $u(x, L) = f_2(x)$. Para ello calculamos los desarrollos en serie de Fourier seno de las funciones f_1 y f_2 , esto es,

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad \text{y} \quad f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Imponiendo las condiciones de frontera antes mencionadas se obtiene que

$$\alpha_n = a_n \quad \text{y} \quad \alpha_n \cosh \frac{n\pi L}{l} + \beta_n \sinh \frac{n\pi L}{l} = b_n$$

que conducen a

$$\alpha_n = a_n \quad \text{y} \quad \beta_n = b_n \csc h \frac{n\pi L}{l} - a_n \coth \frac{n\pi L}{l}.$$

Sustituyendo estas fórmulas en (6.12) se obtiene la solución formal de nuestro problema.

6.3.2 La ecuación de Laplace en coordenadas polares

Para el estudio de problemas relacionados con la ecuación de Laplace en “dominios circulares” tales como un círculo, una corona circular o un dominio Ω del tipo

$$\Omega = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) : 0 < r_0 \leq r \leq r_1 \text{ y } \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

es conveniente escribir el Laplaciano en coordenadas polares. En dichas coordenadas (ver ejercicio 7) la ecuación de Laplace se escribe en la forma

$$u_{rr} + r^{-1}u_r + r^{-2}u_{\theta\theta} = 0.$$

Consideremos el problema

$$\begin{cases} u_{rr}(r, \theta) + r^{-1}u_r(r, \theta) + r^{-2}u_{\theta\theta}(r, \theta) = 0, & 0 < r_0 < r < r_1, 0 < \theta < \beta \\ u(r, 0) = u(r, \beta) = 0, & r_0 < r < r_1 \\ u(r_0, \theta) = f(\theta), u(r_1, \theta) = g(\theta), & 0 < \theta < \beta \end{cases}.$$

Como siempre en nuestro esquema de separación de variables, buscamos una solución que se pueda escribir en la forma $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$. Derivando, sustituyendo en la ecuación de Laplace e imponiendo las condiciones de frontera homogéneas se tiene que $\Theta(\theta)$ ha de ser solución del problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0 \\ \Theta(0) = \Theta(\beta) = 0 \end{cases} \quad (6.13)$$

mientras que $R(r)$ ha de ser solución de la ecuación

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0. \quad (6.14)$$

El problema de Sturm-Liouville (6.13) es un viejo conocido que tiene por autovalores $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\beta}\right)^2$ y por autofunciones $\Theta_n(\theta) = \sin \frac{n\pi\theta}{\beta}$.

Por otra parte, la ecuación (6.14) es un caso particular de un tipo de ecuación conocida como ecuación de Euler, la cual en su versión más general adopta la forma

$$r^2 f''(r) + arf'(r) + bf(r) = 0. \quad (6.15)$$

Como solución de esta ecuación se propone la función $f(r) = r^\mu$. Si sustituimos en la ecuación anterior se tiene

$$[\mu(\mu - 1) + a\mu + b]r^\mu = 0,$$

con lo cual si μ_1 y μ_2 son dos raíces distintas del polinomio $\mu(\mu - 1) + a\mu + b = 0$, entonces la solución general de (6.15) es $f(r) = c_1 r^{\mu_1} + c_2 r^{\mu_2}$ y si $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, entonces la solución general de (6.15) es $f(r) = c_1 r^\mu + c_2 r^\mu \log r$, siendo c_1 y c_2 dos constantes.

Por tanto, la solución general de la ecuación (6.14), donde hemos de poner $\lambda = \left(\frac{n\pi}{\beta}\right)^2$, es

$$R(r) = a_n r^{n\pi/\beta} + b_n r^{-n\pi/\beta}.$$

Con todo ello, la solución formal de nuestro problema de Laplace es

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi\theta}{\beta} \left(a_n r^{n\pi/\beta} + b_n r^{-n\pi/\beta} \right).$$

Solo resta elegir los coeficientes a_n y b_n para que se verifiquen las condiciones de frontera $u(r_0, \theta) = f(\theta)$ y $u(r_1, \theta) = g(\theta)$. Para ello calculamos los desarrollos en serie de Fourier seno de las funciones $f(\theta)$ y $g(\theta)$. Se tiene así que

$$f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi\theta}{\beta} \quad \text{y} \quad g(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin \frac{n\pi\theta}{\beta}$$

e imponiendo las condiciones de contorno anteriores se ha de verificar que

$$a_n r_1^{n\pi/\beta} + b_n r_1^{-n\pi/\beta} = c_n \quad \text{y} \quad a_n r_2^{n\pi/\beta} + b_n r_2^{-n\pi/\beta} = d_n$$

de donde se obtienen los coeficientes a_n y b_n .

6.4 Ejercicios

1. Aplica el método de separación de variables para obtener la solución formal de los problemas

$$(a) \begin{cases} u_t(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x) + A e^{-bx}, & t > 0, 0 < x < \pi \\ u(0, x) = \sin x, & 0 < x < \pi \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

siendo A y b constantes, y

$$(b) \begin{cases} u_t(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x) + x, & t > 0, 0 < x < l \\ u(0, x) = \cos^2 x, & 0 < x < l \\ u(t, 0) + u_x(t, 0) = 0, \quad u(t, l) + u_x(t, l) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

2. Una barra de hierro de coeficiente de conductibilidad térmica 0.15 y 1 metro de longitud se encuentra inicialmente a temperatura cero y uno de sus extremos a $500^\circ C$. Si este último se mantiene permanentemente a dicha temperatura mientras que el otro extremo se mantiene a $0^\circ C$, calcular la temperatura en el punto medio de la barra al cabo de 5 minutos. Hallar también la temperatura estacionaria, es decir, $\bar{u}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x)$.

3. Aplica el método de separación de variables para obtener la solución formal de los problemas

$$(a) \begin{cases} u_{tt}(t, x) = c^2 u_{xx}(t, x), & t > 0, 0 < x < \pi \\ u(0, x) = \sin 2x; u_t(0, x) = \sin^3 x, & 0 < x < \pi \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

y

$$(b) \begin{cases} u_{tt}(t, x) = c^2 u_{xx}(t, x), & t > 0, 0 < x < \pi \\ u(0, x) = \cos x; u_t(0, x) = \sin x, & 0 < x < \pi \\ u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

4. En la vida real las vibraciones de una cuerda se amortiguan debido a que las cuerdas no son perfectamente elásticas. Esta situación se modeliza mediante la ecuación de ondas

$$u_{tt}(t, x) = c^2 u_{xx}(t, x) - 2ku_t(t, x) \quad , \quad t > 0, 0 < x < l \quad (6.16)$$

donde $k < \frac{\pi c}{l}$ y donde el término $-2ku_t$ representa las fuerzas de fricción que causan dicho amortiguamiento. Aplica el método de separación de variables para obtener la solución general de la ecuación (6.16) sujeta a las condiciones de contorno $u(t, 0) = u(t, l) = 0$.

5. Aplica el método de separación de variables para obtener la solución formal del problema

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) = c^2 u_{xx}(t, x) - a^2 u(t, x), & t > 0, 0 < x < \pi \\ u(0, x) = f(x); u_t(0, x) = g(x), & 0 < x < \pi \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

Este es el modelo matemático para una cuerda vibrando en un medio elástico: el término $-a^2 u$ representa la fuerza de reacción del medio sobre la cuerda.

6. **Resonancia en una cuerda.** Calcula la solución formal del problema de ondas

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) = c^2 u_{xx}(t, x) - a^2 u(t, x), & t > 0, 0 < x < \pi \\ u(0, x) = 0; u_t(0, x) = 0, & 0 < x < \pi \\ u(t, 0) = 0; u(t, \pi) = \sin \alpha t, & t > 0 \end{cases}$$

que modeliza una cuerda de longitud π que está fija en uno de sus extremos y acoplada a un oscilador en el otro extremo. Estudia también para qué valores de α se produce el efecto de resonancia (ondas con amplitud creciente y tendiendo a infinito).

7. Probar que en coordenadas polares la ecuación de Laplace se escribe en la forma

$$u_{rr} + r^{-1}u_r + r^{-2}u_{\theta\theta} = 0.$$

8. Aplica el método de separación de variables para obtener la solución formal del problema

$$\begin{cases} u_{rr}(r, \theta) + r^{-1}u_r(r, \theta) + r^{-2}u_{\theta\theta}(r, \theta) = 0, & 0 < r_0 < r < r_1, 0 < \theta < 2\pi \\ u(r_1, \theta) = f(\theta), & 0 < \theta < 2\pi \\ u(r_2, \theta) = g(\theta), & 0 < \theta < 2\pi \end{cases}$$

9. Aplica el método de separación de variables para obtener la solución formal del problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < l, 0 < y < L \\ u(0, y) = g_1(y), u(l, y) = g_2(y), & 0 < y < L \\ u(x, 0) = f_1(x), u(x, L) = f_2(x), & 0 < x < l \end{cases}$$

10. **Conservación de la energía.** La energía total de una cuerda de longitud π vibrando en un instante t , salvo una constante, es

$$E(t) = \int_0^\pi [u_t^2(t, x) + c^2 u_x^2(t, x)] dx.$$

El primer sumando en la integral anterior es la energía cinética y el segundo la potencial. Si $u(t, x)$ es solución clásica del problema de ondas

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) = c^2 u_{xx}(t, x) & t > 0, 0 < x < \pi \\ u(0, x) = f(x) ; u_t(0, x) = g(x) & 0 < x < \pi \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

donde

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \quad \text{y} \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

demuestra que

$$E(t) = \frac{\pi c^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (na_n)^2 + \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2.$$

Observa que ésto, en particular, nos da el principio de conservación de la energía: $E(t)$ es independiente de t . También nos sugiere que un requerimiento físico natural es que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} [(na_n)^2 + b_n^2]$$

sea convergente. Esto es efectivamente cierto si f es continua y diferenciable a trozos y si g es continua a trozos. ¿Por qué?

11. **Unicidad de solución para la ecuación de ondas.** Utiliza los resultados del ejercicio anterior para probar unicidad de solución para el problema de ondas

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) = c^2 u_{xx}(t, x) & t > 0, 0 < x < \pi \\ u(0, x) = f(x) ; u_t(0, x) = g(x) & 0 < x < \pi \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

12. Sean $a, p, l > 0$, $c \in \mathbb{R}$ y consideremos las funciones $\alpha \in C([0, +\infty[)$, $f \in C([0, l])$ y $F \in C([0, +\infty[\times [0, l])$.

(a) Hallar la solución formal del problema

$$\begin{cases} p(u_t(t, x) + \alpha(t)u(t, x)) - au_{xx}(t, x) + cu(t, x) = F(t, x), & t > 0, 0 < x < l \\ u(t, 0) - u(t, l) = u_x(t, 0) - u_x(t, l) = 0, & t > 0 \\ u(0, x) = f(x), & 0 < x < l \end{cases}$$

- (b) Si $r, s, \nu \in \mathbb{R}$, obtener la solución del problema anterior en el caso en que $F(t, x) = \nu e^{rt}$, $f(x) = x$ y $\alpha(t) = 2rt + s$.

6.5 Objetivos

El objetivo básico de este tema es que el alumno adquiera habilidad de cálculo en la resolución, usando el método de separación de variables, de los problemas clásicos de EDPs (calor, ondas y Laplace) con diferentes condiciones iniciales y/o de contorno.

Intentaremos, no obstante, que el alumno se familiarice y tenga conocimiento de la problemática de algunos otros aspectos, más teóricos pero no por ello menos importantes, tales como la convergencia de las series de funciones mediante las cuales se representan las soluciones al aplicar el método de separación de variables; todo ello enfocado a las propiedades de existencia, unicidad y estabilidad de soluciones clásicas.

Finalmente, intentaremos no separar las dos cuestiones anteriores (cálculo formal y análisis matemático de las soluciones) de la física subyacente a los problemas que se abordan de forma que será interesante que el alumno tenga en mente estas cuestiones físicas y trate de obtener conclusiones físicas de las soluciones matemáticas que se calculan.

6.6 Comentarios sobre la Bibliografía

Nuestro estudio de la ecuación del calor sigue básicamente el libro de Folland [8, p.p. 48-51] en lo referente a la existencia de solución y la interpretación física de la misma. Para la unicidad y estabilidad utilizando principios de máximo-mínimo puede consultarse [11, p.p. 215-218]. En [13] se establece la unicidad estudiando el funcional de energía asociado al problema, y se estudia la estabilidad directamente. También son interesantes las referencias [5, 17, 23, 26].

Respecto de la ecuación de ondas, todos los tratados clásicos de EDPs abordan esta ecuación. De nuevo, el hilo conductor que hemos seguido es el libro de Folland. Las cuestiones de existencia, unicidad y estabilidad, tal y como se ha mencionado en el desarrollo de los contenidos, pueden encontrarse en el libro de Marcellán-Casasús-Zarzo. El problema ¿se puede escuchar la forma de un tambor? está tomado del artículo de E. Zuazua [27] y el estudio comparativo de las ecuaciones del calor y ondas del libro de Folland [8, p. 53].

Finalmente, para la ecuación de Laplace hemos seguido [8] y [13].