

Capítulo 1

Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales

En este capítulo deduciremos algunas ecuaciones en derivadas parciales que son de especial interés en ingeniería. Veremos que dichas ecuaciones aparecen acompañadas de ciertas condiciones iniciales y/o de contorno. Todo ello (la EDP y sus condiciones iniciales y/o de contorno) forman lo que se llama un modelo matemático. El objetivo básico de este capítulo es convencer al alumno de que las EDPs son importantes en ingeniería. Para ello, la mejor forma es presentarles una gran variedad de problemas donde aparecen dichas ecuaciones.

1.1 Algunas Ecuaciones Básicas en Ingeniería

En esta sección presentaremos las tres ecuaciones en derivadas parciales más clásicas: la del calor, la de ondas y la de Laplace. Estas ecuaciones nos servirán para ir familiarizándonos con el tipo de problemas que estudiaremos a lo largo de este curso. Casi todas estas ecuaciones involucran un operador diferencial conocido como operador de Laplace o Laplaciano. Este operador se define del siguiente modo: sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, un conjunto abierto y supongamos que $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase $C^2(\Omega)$, esto es, u y todas sus derivadas parciales hasta orden 2 existen y son continuas en todo punto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$. Se llama Laplaciano de u , denotado por Δu , a la función

$$\Delta u(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}) + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(\mathbf{x}).$$

Si la función u depende de $n + 1$ variables, de las cuales una representa al tiempo t , y las otras n variables $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ son espaciales, por Δu también denotaremos a la función

$$\Delta u(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(t, \mathbf{x}) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(t, \mathbf{x}) + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(t, \mathbf{x}).$$

A lo largo de este curso usaremos de forma habitual la siguiente notación para las derivadas parciales de la función $u(t, x_1, \dots, x_n)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_t \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} = u_{x_i} \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = u_{x_i x_j} .$$

1.1.1 La Ecuación del Calor

Consideremos una región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ocupada por un medio (un gas, un líquido o una barra metálica, por ejemplo) de densidad $\rho = \rho(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$ y sometida a la acción de una fuente de calor externa que representamos por medio de una función $F : [0, +\infty[\times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Por $u(t, \mathbf{x})$ denotaremos la temperatura del punto $\mathbf{x} \in \Omega$ en el instante $t \geq 0$. Si suponemos que el calor se transmite únicamente por conducción, entonces la *ley de Fourier* establece que el flujo de calor es proporcional al gradiente de la temperatura, es decir, el flujo de calor es

$$\kappa(\mathbf{x}) \nabla u(t, \mathbf{x})$$

donde $\kappa(\mathbf{x}) \geq 0$ indica la conductividad térmica del medio. Si la temperatura no es muy alta, es muy realista suponer que la densidad, la conductividad térmica y en general las características físicas del medio no se ven afectadas por la temperatura y permanecen constantes a lo largo del tiempo. En este caso, si denotamos por ∂D la frontera de un subconjunto cualquiera $D \subset \Omega$, como consecuencia de la ley de Fourier y del Teorema de la Divergencia se tiene que la cantidad de calor que atraviesa ∂D es

$$\int_{\partial D} \kappa \nabla u \cdot dS = \int_D \operatorname{div}(\kappa(\mathbf{x}) \nabla u(t, \mathbf{x})) \, d\mathbf{x} \quad (1.1)$$

donde, por supuesto, estamos suponiendo suficiente regularidad sobre Ω , $\partial\Omega$ y $\kappa(\mathbf{x}) \nabla u(t, \mathbf{x})$ como para poder aplicar el mencionado Teorema de la Divergencia. Por otra parte, la cantidad de calor que actúa sobre D debido a la fuente F en el instante t viene dada por

$$\int_D F(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \quad (1.2)$$

La variación de la temperatura con respecto al tiempo viene dada por $\frac{\partial u}{\partial t}$ y, por tanto, la variación total de la temperatura en D entre los instantes $t_0 < t_1$ viene dada por

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_D \frac{\partial u}{\partial s}(s, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \, ds \quad (1.3)$$

Combinando (1.1), (1.2) y (1.3) se llega a la igualdad

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_D \left(\operatorname{div}(\kappa(\mathbf{x}) \nabla u(t, \mathbf{x})) + F(t, \mathbf{x}) - \frac{\partial u}{\partial s}(s, \mathbf{x}) \right) \, d\mathbf{x} \, ds = 0$$

la cual es válida para todo $t_0 < t_1$ y todo $D \subset \Omega$. Esto implica que

$$\operatorname{div}(\kappa(\mathbf{x}) \nabla u(t, \mathbf{x})) + F(t, \mathbf{x}) - \frac{\partial u}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = 0$$

para todo $t > 0$ y $\mathbf{x} \in \Omega$. La ecuación anterior se denomina *ecuación del calor*. Cuando la función $\kappa = a^2$ es constante se obtiene la expresión más sencilla

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = a^2 \Delta u(t, \mathbf{x}) + F(t, \mathbf{x}) \quad (1.4)$$

En este tipo de problemas es necesario tener más información que la que proporciona la ecuación anterior para poder calcular $u = u(t, \mathbf{x})$. En concreto, se suele conocer el estado del sistema en el instante inicial, esto es, $u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in \Omega$. Esto es lo que se llama en EDPs una *condición inicial*. Además, también se suele conocer el estado del sistema sobre la frontera

del mismo (lo que llamaremos *condiciones de contorno*). Condiciones de contorno hay de varios tipos. Por ejemplo, la condición de contorno $u(t, \mathbf{y}) = f(\mathbf{y})$ para todo $t > 0$ y todo $\mathbf{y} \in \partial\Omega$ (condición llamada de tipo Dirichlet) representa físicamente que es conocida la temperatura en el borde de Ω durante todo el proceso. Otra condición de contorno que se da a menudo es la llamada condición tipo Neumann la cual se expresa matemáticamente en los términos

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g \quad \text{sobre }]0, +\infty[\times \partial\Omega$$

y representa el flujo de calor que se produce en la dirección perpendicular a $\partial\Omega$. A veces también se combinan las condiciones Dirichlet y Neumann; aparecen entonces las condiciones tipo Robin las cuales se expresan en los términos

$$ku + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g \quad \text{sobre }]0, +\infty[\times \partial\Omega$$

para una cierta constante $k > 0$.

Todo lo anterior, es decir la ecuación (1.4) junto con la condición inicial y alguna condición de contorno forman el modelo matemático que describe el fenómeno físico de la difusión de calor. Así por ejemplo, el modelo matemático para la transmisión de calor en una barra isótropa y homogénea de longitud l , suponiendo conocida la distribución inicial de temperatura y que los extremos permanecen a temperatura cero, es

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + F(t, x) & t > 0, 0 < x < l \\ u(0, x) = u_0(x) & 0 < x < l \\ u(t, 0) = u(t, l) = 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

Por raro que pueda parecer, no es trivial definir el concepto de solución del problema anterior. Por supuesto, lo natural es decir que una solución del problema anterior es una función $u : [0, \infty[\times [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ que sea de clase $C^2(]0, \infty[\times]0, l[)$, continua en $[0, \infty[\times [0, l]$ y que satisfaga la EDP anterior y sus condiciones iniciales y de contorno. Esto es lo que llamaremos una *solución clásica*.

Para familiarizarnos un poco con el lenguaje propio de las ecuaciones en derivadas parciales, es importante señalar también que la ecuación del calor (1.4) es el ejemplo típico de lo que en EDPs se llama una *ecuación parabólica*, que dicho de un modo un tanto informal y sin entrar en definiciones rigurosas es una ecuación donde aparece la derivada primera respecto de la derivada temporal, y las derivadas espaciales son de tipo Laplaciano..

Finalmente, para dar una cierta idea de cual es el estado actual de las matemáticas en relación con las EDPs consideremos el caso de fenómenos de transmisión de calor en los que la conductividad térmica del medio se ve afectada por la temperatura, esto es, $\kappa = \varphi(u)$. En este caso la ecuación del calor se escribe como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(\varphi(u) \nabla u) + F. \quad (1.5)$$

Un caso de particular interés se tiene cuando $\varphi(u) = |u|^{p-1}$, con $p > 1$. Se obtiene entonces la llamada ecuación del calor no lineal. Del estudio matemático de este tipo de ecuaciones, llamadas no lineales, se ocupan *actualmente* un gran número de matemáticos en todo el mundo.

1.1.2 La Ecuación de Ondas

La ecuación de ondas, en su versión más sencilla, tiene la forma

$$u_{tt}(t, \mathbf{x}) = c^2 \Delta u(t, \mathbf{x}) \quad (1.6)$$

donde u representa la amplitud de una onda viajando en un medio de dimensión n (en la práctica n será igual a 1, 2 ó 3), $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ representa la posición del punto \mathbf{x} en el medio, t es el tiempo y c es una constante que representa la velocidad de propagación de la onda en dicho medio. La ecuación (1.6) proporciona un modelo matemático razonable en diversos problemas físicos tales como: vibraciones de una cuerda vibrante (una cuerda de guitarra, por ejemplo), vibraciones de una membrana elástica, ondas en fluidos incompresibles, ondas de sonido en el aire, ondas electromagnéticas, etc... .

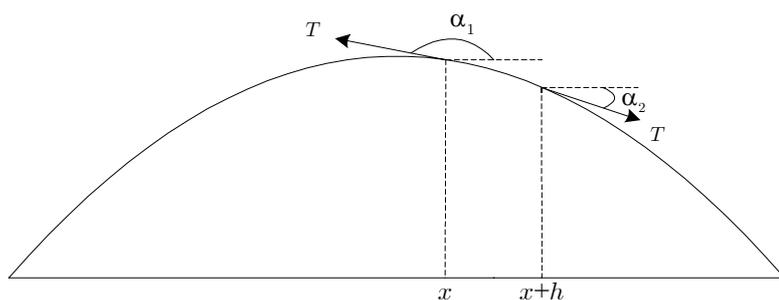
La ecuación de ondas es el ejemplo típico de lo que en EDPs se llama una *ecuación hiperbólica*, esto es, una ecuación donde aparece la derivada segunda respecto de la variable temporal mientras que las derivadas espaciales son de tipo Laplaciano..

Deduciremos a continuación (1.6) en el caso del problema de la cuerda vibrante. Supongamos que tenemos una cuerda *tensa* de longitud l sujeta en sus extremos. Supongamos además que la cuerda es *flexible* y *elástica* y que tiene una densidad de masa constante de valor ρ . Supongamos que estiramos ligeramente la cuerda y la soltamos de manera que ésta vibra únicamente en la dirección vertical. Por $u(t, x)$ denotaremos el desplazamiento vertical de la cuerda en la posición $x \in [0, l]$ y en el instante $t > 0$. Nuestro objetivo es mostrar que (1.6), con $n = 1$, proporciona un modelo matemático aceptable para este problema físico en el caso de que las vibraciones sean de pequeña amplitud.

Consideremos un pequeño segmento de la cuerda $[x, x + h]$. El movimiento de la cuerda está determinado por la segunda ley de Newton

$$F = ma \tag{1.7}$$

donde $m = \rho h$ es la masa del segmento, $a = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ es la aceleración, y F representa el conjunto de fuerzas que actúan sobre dicho segmento. En un primer momento supondremos que sobre la cuerda sólo actúa la fuerza debida a la tensión en los extremos. Puesto que la cuerda es flexible, la tensión $T(x)$ en cualquier punto de la cuerda es tangente a la misma. Además, para pequeñas oscilaciones se puede asumir que el valor de esta tensión es igual en todos los puntos de la cuerda. De esta forma, las componentes verticales de la tensión en los puntos x , $x + h$ valen $T \sin \alpha_1$, $T \sin \alpha_2$, respectivamente.



Por tanto, (1.7) tiene la forma

$$T \sin \alpha_1 + T \sin \alpha_2 = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{1.8}$$

De la fórmula

$$\sin \theta = \frac{\tan \theta}{\sec \theta} = \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$$

se deduce que en el caso de ser $\tan \theta$ despreciable frente a la unidad (suposición que tiene sentido hacer en nuestro problema en el caso de que las vibraciones sean pequeñas) podemos identificar $\sin \theta$ con $\tan \theta$. Teniendo en cuenta además que

$$\tan \alpha_1 = -\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \quad \text{y} \quad \tan \alpha_2 = \frac{\partial u}{\partial x}(t, x + h)$$

la ecuación (1.8) se transforma en

$$\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \left[\frac{\partial u}{\partial x}(t, x + h) - \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right].$$

Dividiendo por h y tomando límites cuando $h \rightarrow 0$ se obtiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x),$$

con $c^2 = \rho^{-1}T$.

Finalmente hemos de imponer las *condiciones de contorno*

$$u(t, 0) = 0 \quad , \quad u(t, l) = 0$$

que indican que la cuerda está sujeta en los extremos, y las *condiciones iniciales*

$$u(0, x) = f(x) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0$$

la primera de las cuales indica que en el instante inicial la cuerda se ha estirado y por tanto admite la forma dada por la función f , y la segunda de ellas indica que la cuerda se ha soltado sin ninguna velocidad inicial.

Con todo ello, el modelo matemático para el problema de la cuerda vibrante se formula del siguiente modo: dada $f : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$, encontrar una función

$$u : [0, \infty[\times [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$$

que sea de clase C^2 ($]0, \infty[\times]0, l[$), que sea continua en $[0, \infty[\times [0, l]$ y que satisfaga la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)$$

en todo punto del conjunto $]0, \infty[\times]0, l[$ y las condiciones iniciales y de contorno

$$\begin{cases} u(0, x) = f(x), & 0 \leq x \leq l \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0, & 0 \leq x \leq l \\ u(t, 0) = 0, & t \geq 0 \\ u(t, l) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

1.1.3 La Ecuación de Laplace

La ecuación de Laplace en dimensión $n > 1$ se escribe como

$$\Delta u(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

La ecuación de Laplace no homogénea también es conocida con el nombre de ecuación de Poisson y tiene la forma

$$\Delta u = f$$

siendo $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función dada.

Esta ecuación modeliza fenómenos físicos estacionarios, es decir, independientes del tiempo, y es el ejemplo típico de lo que en EDPs se llama una *ecuación elíptica*. Veamos ahora algunos ejemplos concretos donde aparece la ecuación de Laplace:

- **Elasticidad lineal.** Sea Ω una membrana elástica sujeta en el borde y sobre la cual actúa una fuerza vertical $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. La flexión $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de dicha membrana es solución del problema de Dirichlet homogéneo

$$\begin{cases} \kappa \Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

donde κ es una constante en el caso de ser Ω una membrana isótropa, y depende las propiedades físicas de la membrana.

- **Mecánica de fluidos.** Supongamos que \mathbf{V} es el campo vectorial de velocidad de un fluido estacionario (esto es, $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z)$ no depende del tiempo t), incompresible ($\text{div} \mathbf{V} = 0$) e irrotacional ($\text{rot} \mathbf{V} = 0$), en un dominio simplemente conexo Ω . Dado que $\text{rot} \mathbf{V} = 0$, \mathbf{V} es un campo conservativo, y por tanto, existe una función potencial u tal que $\mathbf{V} = \nabla u$. Ahora bien, como $\text{div} \mathbf{V} = 0$, entonces

$$\text{div} \mathbf{V} = \text{div} \nabla u = \Delta u = 0.$$

Por tanto, el potencial u satisface la ecuación de Laplace la cual suele ir acompañada de una condición de contorno, por ejemplo

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \langle \mathbf{V}, \mathbf{n} \rangle = g$$

donde \mathbf{n} denota el vector normal unitario exterior a la frontera de Ω , \langle, \rangle es el producto escalar euclídeo, y $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ es una función conocida. Con todo ello se tiene el problema de Neumann

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g & \text{sobre } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

- **Electrostática.** Un problema básico en electrostática consiste en describir el campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ en un volumen Ω que contiene una densidad de cargas $\rho(\mathbf{x})$ y encerrado en una superficie perfectamente conductora Γ . De la ley de Coulomb se deduce que el campo eléctrico satisface la ecuación

$$\text{div} \mathbf{E} = \rho \quad \text{en } \Omega.$$

Además, por la ley de Faraday, $\text{rot} \mathbf{E} = 0$. Por tanto, al igual que en el ejemplo anterior, $\mathbf{E} = \nabla u$, donde u es el potencial de dicho campo eléctrico. En este caso es natural imponer la condición de contorno $u = c$ sobre Γ , con $c = \text{cte}$. Con todo ello se tiene el problema

$$\begin{cases} \Delta u = \rho & \text{en } \Omega \\ u = c & \text{sobre } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

- **Física estadística.** Un problema clásico en teoría de procesos estocásticos es la descripción del movimiento Browniano. El problema consiste en describir el movimiento de las partículas que se encuentran en el interior de un dominio Ω moviéndose de manera aleatoria hasta que interceptan la frontera Γ , momento en el que se paran. Supongamos que $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ y sea $u(\mathbf{x})$ la probabilidad de que la partícula que empieza a moverse en el punto $\mathbf{x} \in \Omega$ se pare en algún punto de Γ_1 . De esta forma, $u(\mathbf{x}) = 1$ significa que este suceso ocurre mientras que $u(\mathbf{x}) = 0$ significa que el suceso no ocurre. La función u satisface la ecuación de Laplace

$$\Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega$$

a la que hay que añadir la condición de contorno

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Gamma_1 \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \Gamma_2 \end{cases}$$

- **Transmisión de calor y propagación de ondas en régimen estacionario.** Es evidente que tanto la ecuación del calor como la de ondas se reducen a la ecuación de Laplace en el caso de que la distribución de temperaturas sea estacionaria (esto es, independiente del tiempo y por tanto $u_t = 0$) o que las ondas se propagan a velocidad constante, con lo cual $u_{tt} = 0$.

1.2 Modelización Matemática en Mecánica de Medios Continuos

Desde un punto de vista físico, se llama *medio continuo* a todo líquido, gas o sólido cuando se le considera desde un punto de vista macroscópico, en contraposición con una descripción corpuscular. Por supuesto, la definición anterior deja mucho margen a la ambigüedad y a las interpretaciones particulares que cada uno quiera darle. No hay de que preocuparse, pero sí que hay que ser precisos: en realidad, lo que estudiaremos en esta sección serán algunas propiedades matemáticas del *modelo matemático* mediante el cual pretendemos describir un líquido, gas o sólido. Lo único que nos va a interesar es estudiar las deformaciones que sufre un medio continuo sometido a la acción de alguna fuerza (ya sea externa, interna o ambas). Por tanto, hemos de empezar por definir los *conceptos matemáticos* de medio continuo y de movimiento de un medio continuo.

Definición 1.2.1 Dado $\Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto acotado y conexo, llamaremos *medio continuo a toda aplicación*

$$\Phi : \begin{array}{l} [0, T] \times \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t; \mathbf{y}) \rightsquigarrow \mathbf{x} = \Phi(t; \mathbf{y}). \end{array}$$

que satisface las siguientes propiedades de regularidad:

- $\Phi \in C^2$,
- para cada t fijo, la aplicación $\Phi(t; \cdot) \equiv \Phi_t : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t = \Phi(t; \Omega_0)$ es un difeomorfismo (esto es, biyectiva, diferenciable y con inversa diferenciable), y
- Φ_0 es la identidad.

En la definición anterior, la variable t representa el tiempo y tanto $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \Omega_0$ como $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_t$ representan las coordenadas espaciales. A partir de ahora denotaremos por $\Omega_0 = \Omega(0)$ la configuración inicial de dicho medio, es decir, Ω_0 representa la región de \mathbb{R}^3 ocupada por el líquido, gas o sólido en el instante inicial. Por su parte, Ω_t representa la configuración del medio continuo en el instante t , esto es, la región ocupada por dicho medio en el tiempo t .

Es preciso también hacer algunos comentarios sobre las hipótesis (a), (b) y (c) en la definición anterior:

- (i) La hipótesis (a) representa físicamente una deformación *suave*. Sin embargo, no es esa la finalidad de esta hipótesis. Su finalidad es puramente matemática: en lo que sigue tendremos que hacer cálculos en los que nos interesará que se cumpla la propiedad de la igualdad de las derivadas cruzadas y por eso hacemos esta hipótesis de ser $\Phi \in C^2$.
- (ii) La hipótesis (b) nos garantiza que para cada t , la matriz jacobiana

$$D\Phi(t; \cdot) = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(y_1, y_2, y_3)}$$

es no singular, es decir, $\det(D\Phi(t; \cdot)) \neq 0$ para cada t . Además, de la hipótesis (a) concluimos que $D\Phi(t; \mathbf{y})$ es de clase $C^1([0, T] \times \Omega_0)$.

- (iii) Dado que Φ_0 es la identidad, $\det(D\Phi(0; \cdot)) = 1$. De (ii) deducimos ahora que

$$\det(D\Phi(t; \cdot)) > 0 \quad \forall 0 \leq t \leq T.$$

Asociado al medio continuo Φ siempre tenemos un campo de velocidades (eulerianas) que se define como

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (v_1, v_2, v_3) = \left(\frac{\partial x_1}{\partial t}, \frac{\partial x_2}{\partial t}, \frac{\partial x_3}{\partial t} \right).$$

Desde un punto de vista físico, se dice que un medio continuo sufre una deformación si las distancias relativas de los puntos materiales de que se compone dicho medio varían a lo largo del tiempo. Precisaremos esta definición desde un punto de vista matemático. Para ello consideremos el campo vectorial de desplazamientos del medio continuo, esto es, el campo

$$\begin{aligned} \mathbf{u} : \Omega_0 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{y} &\rightsquigarrow \mathbf{u}(\mathbf{y}) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3) \end{aligned}$$

siendo $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ un punto de Ω_0 y $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ la nueva posición que ocupa el punto \mathbf{y} en el instante t . Escrito en coordenadas

$$u_i = x_i - y_i = \Phi_i(t; \mathbf{y}) - y_i, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Finalmente, se llama tensor de deformaciones (linealizado) al tensor de componentes

$$\varepsilon_{jk}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial y_k} + \frac{\partial u_k}{\partial y_j} \right). \quad (1.9)$$

1.2.1 Leyes de Conservación

La mecánica clásica de medios continuos se basa en tres leyes de conservación físicas: conservación de la masa, de la cantidad de movimiento y de la energía, a partir de las cuales se deducen las ecuaciones matemáticas que modelizan el movimiento de dicho medio continuo. En el proceso que consiste en generar ecuaciones (en derivadas parciales) a partir de dichos principios físicos, juegan un papel esencial dos teoremas conocidos como Teorema de Cauchy (al que nos hemos referido en la asignatura Ampliación de Cálculo) y Teorema del Transporte de Reynolds, el cual enunciamos a continuación.

Consideremos un conjunto medible $\omega(t) \subseteq \Omega(t)$, de modo que $\partial\omega(t)$ sea una superficie regular orientable con el vector normal apuntando hacia afuera de $\omega(t)$. Sea ahora $k : \Omega(t) \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar y consideremos finalmente la función

$$K(t) = \int_{\omega(t)} k(t; \mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Nos planteamos ahora el problema siguiente: ¿Cómo calculamos $\frac{dK}{dt}$? Antes de abordar la solución de este problema, es importante tener en cuenta que la dependencia de K en t es no sólo respecto del integrando sino también del *dominio de integración*. Recordemos que $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ denota el campo de velocidades del medio continuo. La respuesta a la cuestión anterior viene dada a través del Teorema del Transporte de Reynolds. Una prueba de este teorema puede encontrarse en [7, Th. I.8, p.p. 26-27] y [24, Lema 2.3.1 y Teorema 2.5.1]. Para una interpretación física se recomienda [12, p.p. 8-10].

Teorema 1.2.1 (Transporte de Reynolds) Sean k , \mathbf{v} y $\omega(t)$ como antes y supongamos que las funciones k y \mathbf{v} son de clase $C^1([0, T[\times \bar{\Omega})$ y que sus derivadas parciales son acotadas. Entonces,

$$\frac{dK}{dt} = \int_{\omega(t)} \left[\frac{\partial k}{\partial t} + \operatorname{div}(k\mathbf{v}) \right] \, d\mathbf{x}, \quad (1.10)$$

o también

$$\frac{dK}{dt} = \int_{\omega(t)} \frac{\partial k}{\partial t} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\omega(t)} k\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.11)$$

Pasemos ahora a estudiar las leyes de conservación de la mecánica de medios continuos.

Conservación de la masa

Dado un medio continuo $\Omega(t)$, se llama de densidad de masa a una función (diferenciable y con derivadas parciales acotadas) $\rho = \rho(t; \mathbf{x})$ que verifica que para cada subconjunto medible $\omega(t) \subseteq \Omega(t)$, la masa de $\omega(t)$ está dada por

$$m(\omega(t)) = \int_{\omega(t)} \rho(t; \mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

El principio de conservación de la masa establece que

$$\frac{d}{dt} m(\omega(t)) = 0 \quad \forall \omega(t) \subseteq \Omega(t).$$

Del Teorema del Transporte de Reynolds se deduce que

$$\frac{d}{dt} m(\omega(t)) = \int_{\omega(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) \right] \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall \omega(t) \subseteq \Omega(t).$$

Si suponemos ahora que la función del integrando anterior es continua, entonces se tiene que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1.12)$$

y viceversa, si se cumple (1.12), entonces volviendo hacia atrás también se tiene que

$$\frac{d}{dt} m(\omega(t)) = 0 \quad \forall \omega(t) \subseteq \Omega(t).$$

La ecuación (1.12) es la expresión analítica del principio de conservación de la masa y se denomina usualmente *ecuación de continuidad*.

Conservación de la Cantidad de Movimiento

La cantidad de movimiento del sistema material $\omega(t) \subseteq \Omega(t)$ viene dada por

$$\int_{\omega(t)} \rho \mathbf{v} \, d\mathbf{x}$$

donde ρ es la densidad de masa del sistema $\omega(t)$ y \mathbf{v} es el campo de velocidades del medio continuo.

Por otra parte, las fuerzas que actúan sobre $\omega(t)$ son de dos tipos: (a) fuerzas másicas de densidad de volumen $\rho \mathbf{f}$, las cuales son bien fuerzas de largo alcance como la fuerza de la gravedad o bien fuerzas de corto alcance que tienen un origen molecular, y (b) fuerzas exteriores que actúan sobre la frontera del sistema $\omega(t)$ y que representamos por medio de la función de densidad $\mathbf{g}(t; \mathbf{x}, \mathbf{n})$ donde \mathbf{n} representa el vector normal unitario exterior a $\partial\omega(t)$. Por tanto, la suma de las fuerzas que actúan sobre el sistema $\omega(t)$ es igual a

$$\int_{\omega(t)} \rho \mathbf{f} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\omega(t)} \mathbf{g}(t; \mathbf{x}, \mathbf{n}) \, dS.$$

El principio de conservación de la cantidad de movimiento establece que *la variación de la cantidad de movimiento que experimenta el sistema $\omega(t)$ es igual a la suma de las fuerzas que actúan sobre dicho sistema*. De manera precisa y en lenguaje matemático este principio se escribe pues como

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\omega(t)} \rho \mathbf{f} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\omega(t)} \mathbf{g}(t; \mathbf{x}, \mathbf{n}) \, dS \quad \forall \omega(t) \subseteq \Omega(t). \quad (1.13)$$

Tras efectuar algunos cálculos que involucran a los teoremas de Cauchy y del Transporte de Reynolds, y al principio de conservación de la masa se llega al sistema de ecuaciones

$$\rho(\gamma_i - f_i) - \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq 3, \quad (1.14)$$

donde σ_{ij} es el tensor de esfuerzos del medio continuo y

$$\gamma_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

El sistema de ecuaciones (1.14) describe el movimiento del medio continuo $\Omega(t)$ y se denominan *ecuaciones de movimiento*. Si el medio continuo está en equilibrio o en movimiento de translación uniforme, entonces el vector $\boldsymbol{\gamma}$ es nulo y el sistema anterior se reduce a

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} + \rho f_i = 0 \quad \text{en } \Omega(t), \quad (1.15)$$

Estas tres ecuaciones (una para cada $i = 1, 2, 3$) en derivadas parciales se denominan *ecuaciones de equilibrio*.

Como consecuencia de otro principio de conservación, el principio de conservación del momento angular, se prueba que el tensor $\sigma = \sigma_{ij}$ es simétrico.

Conservación de la Energía

En algunos problemas concretos de Mecánica de Medios Continuos no es preciso recurrir a la conservación de la energía para cerrar el modelo. Otras veces, sin embargo, sí que es preciso acudir a esta ley de conservación. En esta sección estudiaremos, sin entrar mucho en detalle, esta última ley de la Mecánica Clásica.

Si hacemos caso de nuevo a nuestros sentidos, podemos observar que asociado a un medio continuo hay una magnitud de naturaleza escalar claramente perceptible: *la temperatura*. Y también sabemos que el agua en movimiento es capaz de producir energía, por ejemplo en la forma de calor. De modo que en todo medio continuo tenemos, por un lado una *energía cinética* de valor $\frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2$, que es debida a la velocidad de translación de las partículas que componen el medio; y por otro lado, una *energía interna* que es debida a fenómenos tales como las vibraciones moleculares, presencia de campos electromagnéticos..., y que es el origen de la magnitud macroscópica llamada temperatura. Sabemos además que la energía mecánica se transforma en energía calórica y viceversa. Es la Termodinámica la parte de la Física que se encarga del estudio de estos intercambios de energía. En esta sección nos limitaremos a formular matemáticamente el primer principio de la Termodinámica.

Dado un medio continuo $\Omega(t)$ y un dominio acotado $\omega(t) \subseteq \Omega(t)$, se llama *energía total* del sistema $\omega(t)$ a la cantidad

$$\mathcal{E}(\omega(t)) = \int_{\omega(t)} \rho(t; \mathbf{x}) E(t; \mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

donde

$$E(t; \mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + e,$$

con e la energía interna específica (esto es, energía interna por unidad de masa). El primer principio de la Termodinámica establece que *la variación de la energía total de todo sistema material es igual al trabajo de las fuerzas exteriores aplicadas al sistema más la cantidad de calor suministrado a dicho sistema. Si el calor es extraído o el trabajo realizado por el sistema, estas contribuciones son negativas.*

Escrito en lenguaje matemático, este principio se escribe como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho \left(\frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + e \right) \, d\mathbf{x} &= \int_{\omega(t)} \rho \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\omega(t)} \langle \mathbf{g}(\mathbf{n}), \mathbf{v} \rangle \, dS \\ &+ \int_{\omega(t)} \rho Q \, d\mathbf{x} - \int_{\partial\omega(t)} \langle \mathbf{q}, \mathbf{n} \rangle \, dS, \end{aligned}$$

donde

$$\int_{\omega(t)} \rho \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle dx$$

representa el trabajo realizado por las fuerzas exteriores,

$$\int_{\partial\omega(t)} \langle \mathbf{g}(\mathbf{n}), \mathbf{v} \rangle dS$$

es el trabajo de las fuerzas superficiales que actúan sobre $\partial\omega(t)$,

$$\int_{\omega(t)} \rho Q dx$$

es el aporte o pérdida de calor debidos a los efectos de reacción química, radiación y otros, y finalmente

$$\int_{\partial\omega(t)} \langle \mathbf{q}, \mathbf{n} \rangle dS$$

es el flujo de calor saliente a través de la frontera.

Aplicando los teoremas de Cauchy, del Transporte de Reynolds y de la Divergencia, y el principio de conservación de la masa (o ecuación de continuidad) se llega finalmente a la ecuación

$$\rho \frac{De}{Dt} = \sigma_{ij} D_{ij}(\mathbf{v}) + \rho Q - \text{div}(\mathbf{q}) \quad (1.16)$$

donde

$$\frac{De}{Dt} = \frac{\partial e}{\partial t} + \langle \nabla e, \mathbf{v} \rangle$$

es la derivada material de la energía interna, y

$$\sigma_{ij} D_{ij}(\mathbf{v}) = \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{x_j},$$

con

$$D(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + {}^t \nabla \mathbf{v})$$

la parte simétrica del gradiente de la velocidad.

La ecuación (1.16), la cual expresa de manera concreta el primer principio de la termodinámica, relaciona la variación de energía interna (miembro de la izquierda), el trabajo por unidad de tiempo (primer sumando del término de la derecha), y el aporte o pérdida de calor (dos sumandos restantes).

1.2.2 Ecuaciones de la Elasticidad Lineal

En esta sección nos ocuparemos de un tipo particular de medios continuos: los sólidos elásticos. El objetivo básico de esta sección es introducir las ecuaciones clásicas de la elasticidad lineal. No haremos una deducción rigurosa de tales ecuaciones sino que nos limitaremos a exponer muy someramente algunas ideas subyacentes a esta teoría. Para un estudio mucho más completo y riguroso que el presentado aquí puede consultarse [7, Ch. IV].

Escrito en lenguaje matemático, diremos que el medio Ω es elástico si su tensor de esfuerzos asociado se puede escribir en la forma

$$\sigma_{ij} = a_{ijkh} \varepsilon_{kh} \quad (1.17)$$

donde $\varepsilon(\mathbf{u}) = (\varepsilon_{ij})$ es el tensor de deformaciones (linealizado) y a_{ijkl} son unos coeficientes que dependen de las propiedades del material y que se denominan coeficientes de elasticidad. Se dice que el material elástico Ω es *homogéneo* si los coeficientes a_{ijkl} son constantes, es decir, si no dependen del punto $\mathbf{x} \in \Omega$. En caso contrario se dice que el medio es no homogéneo.

Por otra parte, se dice que un material elástico Ω es *isótropo* si en cualquier punto $\mathbf{x} \in \Omega$ el material tiene las mismas propiedades en todas las direcciones posibles alrededor de dicho punto.

Para el caso de materiales elásticos isótropos se puede demostrar que el tensor de esfuerzos σ asociado a dicho medio se escribe en la forma

$$\sigma = \lambda \operatorname{traza}(\varepsilon(\mathbf{u})) I + 2\mu \varepsilon(\mathbf{u})$$

donde $\lambda \geq 0$ y $\mu > 0$ son constantes si el material es homogéneo y se denominan *coeficientes de Lamé*. Esta forma del tensor de esfuerzos es lo que se conoce en Teoría de la Elasticidad como *ley de Hooke*, y es un primer ejemplo de lo que se llama una ley constitutiva.

Supongamos que tenemos un sólido elástico, homogéneo, isótropo y que en su estado natural ocupa una región $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Supondremos además que el sólido está empotrado en una parte de su frontera, llamémosla Γ_0 , y que sobre el resto de la frontera, Γ_1 , actúa una densidad de fuerzas superficiales $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)$. También tendremos en cuenta la acción sobre el sólido de una densidad de fuerzas volúmicas $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$.

El modelo matemático clásico para este problema es el siguiente: sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto acotado y conexo de frontera $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ una superficie regular a trozos. Dadas $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3) : \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ funciones continuas, se trata de encontrar una función $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ de modo que $u_i \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $1 \leq i \leq 3$, y de forma que para cada $1 \leq i \leq 3$ se cumpla,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) + f_i = 0 & \text{en } \Omega \\ u_i = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \\ \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(\mathbf{u}) n_j = g_i & \text{sobre } \Gamma_1 \end{array} \right. \quad (\text{SEL})$$

donde

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}) = \lambda \left(\sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk} \right) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij},$$

con $\lambda \geq 0$, $\mu > 0$, y \mathbf{n} es el vector normal unitario exterior a Γ_1 . La función vectorial \mathbf{u} nos mide los desplazamientos que sufren cada uno de los puntos de Ω , y en caso de verificar las condiciones anteriores se denomina una *solución clásica* del sistema de elasticidad lineal. Nótese también que el sistema (SEL) refleja las ecuaciones de equilibrio del medio Ω .

1.2.3 Ecuaciones de Navier-Stokes

Nos ocuparemos en esta sección de otro de los medios continuos de gran interés en ingeniería: los fluidos. Las famosas ecuaciones de Navier-Stokes modelizan el movimiento de fluidos tan usuales como el agua, el aceite o el aire y fueron formuladas en 1827 por Navier para el caso incompresible, y de forma general por Stokes en 1845.

Nos ocuparemos a continuación de formular el modelo matemático para fluidos viscosos, newtonianos e incompresibles. Contrariamente a la Elasticidad donde la incógnita es el desplazamiento, en Mecánica de Fluidos la incógnita es la velocidad, la cual es usual denotar por \mathbf{u} .

A partir de ahora en esta sección seguiremos pues este convenio de notación. La Mecánica de Fluidos se construye a partir de los siguientes postulados:

- (a) El tensor de esfuerzos σ depende de $\nabla \mathbf{u}$. Este postulado, atribuido a Stokes, representa que las fuerzas de contacto dependen del estado de movimiento del fluido sólo a través de los gradientes de velocidad.
- (b) La dependencia de σ respecto a $\nabla \mathbf{u}$ es lineal.
- (c) El fluido es isótropo y homogéneo.

Con todas estas hipótesis y en el caso incompresible, esto es, $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, se consigue probar que el tensor de esfuerzos σ viene dado por

$$\sigma = -pI + 2\mu D,$$

donde $p = p(t; \mathbf{x})$ es la presión, μ es el llamado coeficiente de viscosidad dinámico (se supone constante), y $D = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u})$ es la parte simétrica del gradiente de la velocidad. Con todo ello, la ley de conservación de la cantidad de movimiento en coordenadas cartesianas se escribe como

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i + \frac{1}{\rho} f_i, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad (1.18)$$

donde ρ es la densidad y $\nu = \mu/\rho$ es la viscosidad cinemática. Las ecuaciones (1.18), junto con la condición de incompresibilidad $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, son las famosas ecuaciones de Navier-Stokes. Por supuesto, para completar el modelo matemático hay que añadir las correspondientes condiciones iniciales y de contorno que dependerán del tipo de problema que se esté considerando.

1.3 Problemas Correctamente Planteados

El modelo matemático para la transmisión de calor en una barra de longitud l , suponiendo conocida la distribución inicial de temperatura y que los extremos permanecen a temperatura cero, es

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + F(t, x) & t > 0, 0 < x < l \\ u(0, x) = u_0(x) & 0 \leq x \leq l \\ u(t, 0) = u(t, l) = 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

Por *solución clásica* del problema anterior entendemos una función $u : [0, \infty[\times [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ que sea de clase $C^2([0, \infty[\times]0, l[)$, continua en $[0, \infty[\times [0, l]$ y que satisfaga la EDP anterior y sus condiciones iniciales y de contorno. Por supuesto, también hemos de precisar la regularidad de los datos del problema, en este caso, de las funciones F y u_0 . En este marco clásico, lo natural es pedir que dichas funciones sean continuas.

Como veremos a lo largo de este curso, *son varios los conceptos de solución que se pueden asociar a un modelo matemático*. Por el momento, y para fijar ideas, nos centraremos en el concepto de solución clásica.

Según la definición dada por Hadamard en 1904, diremos que un *modelo matemático está correctamente planteado cuando existe una única solución* del problema la cual además es **estable**, es decir, dicho de un modo informal, que la *solución varía poco si los datos del problema varían poco*.

Los conceptos de existencia y unicidad son puramente matemáticos (rara vez un físico o un ingeniero se plantearía estas cosas, *es algo que se da por supuesto, aunque de hecho la existencia y unicidad es un buen test para validar el modelo*) mientras que el concepto de estabilidad obedece a intereses físicos y de ingeniería. Nótese que el conocimiento de las condiciones iniciales y de contorno de un problema serán efectuados por mediciones y por consiguiente estarán sujetos a pequeños errores. De esta forma, el problema que resolveremos no será el problema real sino un problema aproximado. Si el problema no fuese estable no podríamos garantizar que la solución del problema aproximado sea una aproximación de la solución real. Por ello es necesaria la estabilidad del problema para que el modelo matemático describa correctamente el fenómeno físico. Además, en muchos de los modelos matemáticos que aparecen actualmente en ingeniería, el cálculo de la solución se efectúa mediante métodos numéricos. La estabilidad de solución es de nuevo ahora una pieza clave para garantizar la convergencia de los métodos numéricos que se empleen para calcular estas soluciones.

Por supuesto, hay muchos problemas que no están correctamente planteados. En los ejercicios 4 y 5 se presentan dos ejemplos de problemas no correctamente planteados.

1.4 Ejercicios

1. Comprueba que la función

$$u(t, x, y) = \frac{1}{t} e^{-\frac{x^2+y^2}{4a^2t}}$$

satisface la ecuación del calor

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy})$$

para $(t, x, y) \in]0, \infty[\times \mathbb{R}^2$.

2. Comprueba que la función

$$u(x, y) = \log(x^2 + y^2)$$

satisface la ecuación de Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

para $(x, y) \neq (0, 0)$.

3. El objetivo de este ejercicio es deducir la fórmula de D'Alembert para la solución general de la ecuación de ondas 1-dimensional

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}.$$

(a) Comprueba que si $u(y, z) = f(y) + g(z)$, con $f, g \in C^2(\mathbb{R})$, entonces u satisface la ecuación $u_{yz} = 0$. Recíprocamente, demuestra que toda solución de $u_{yz} = 0$ es de esta forma.

(b) Sea $y = x - ct$ y $z = x + ct$. Usa la regla de la cadena para mostrar que

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = -4c^2 u_{yz}.$$

(c) Concluye que la solución general de la ecuación de ondas $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ es

$$u(t, x) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

donde $f, g \in C^2(\mathbb{R})$.

(d) Comprueba que la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & \text{con } (t, x) \in]0, \infty[\times \mathbb{R} \\ u(0, x) = \phi(x) & \text{con } \phi \in C^2(\mathbb{R}) \\ u_t(0, x) = \psi(x) & \text{con } \psi \in C^1(\mathbb{R}) \end{cases}$$

está dada por la llamada fórmula de D'Alembert

$$u(t, x) = \frac{1}{2} (\phi(x - ct) + \phi(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy.$$

4. Consideremos el siguiente problema para la ecuación de ondas:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & (t, x) \in]0, \infty[\times]0, l[\\ u(0, x) = 0, & 0 < x < l \\ u(t, 0) = u(t, l) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Comprueba que para cada $n \in \mathbb{N}$, las funciones $u_n(t, x) = c_n \sin \frac{\pi t}{l} \sin \frac{\pi x}{l}$, con $c_n = cte$, son soluciones de dicho problema. ¿Está correctamente planteado este problema? ¿Por qué?

5. Comprueba que las funciones

$$u_n(x, y) = e^{-n^{1/2}} \sin(nx) \sinh(ny)$$

son soluciones de la ecuación de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$ y que además satisfacen las condiciones de contorno

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0 \\ u_y(x, 0) = ne^{-n^{1/2}} \sin(nx) \end{cases}$$

Demuestra que este problema no es estable. Indicación: comprueba que para n suficientemente grande, los datos del problema convergen uniformemente a cero, mientras que la solución no converge a cero para $y \neq 0$ y $x \neq k\pi$, con $k \in \mathbb{N}$.

1.5 Objetivos

Este primer capítulo de la asignatura Transformadas Integrales y EDPs tiene un primer objetivo claramente pedagógico:

- Suscitar en el alumno el deseo de estudiar esta asignatura.

Para ello, lo mejor es mostrarle que esta asignatura juega un papel clave en su formación. Por este motivo, se introducirán en este primer tema diversos problemas físicos de interés en ingeniería que se modelizan por medio de EDPs. No es necesario hacer con detalle todas las deducciones de los modelos que hemos presentado en este capítulo, no sólo porque eso exigiría bastantes horas sino también porque la mayoría de estos modelos se presentan en otras asignaturas de la titulación.

Se pretende además que el alumno entienda perfectamente los conceptos de:

- Condiciones iniciales y de contorno; y que estos aparecen ligados a la EDP.
- Solución clásica.
- Problema correctamente planteado insistiendo en la importancia, no sólo matemática sino también en ingeniería, de los conceptos de existencia, unicidad y estabilidad de soluciones.

1.6 Comentarios sobre la Bibliografía

Los modelos matemáticos expuestos en la primera sección han sido tomados principalmente de los libros de Folland [8] y Peral [17]. La sección dedicada a la modelización matemática en Mecánica de Medios Continuos está escrita siguiendo principalmente el libro de Duvaut [7] en lo referente a las ecuaciones de la elasticidad, y los apuntes de Vázquez [24] en lo que hace referencia a las ecuaciones de Navier-Stokes.