Ingeniero Industrial
"Transformadas Integrales y Ecuaciones en Derivadas Parciales"
Curso 2010/11 (J.A. Murillo)

Problemas Tema 3
"El problema de Cauchy para ecuaciones de primer orden"

1. Dada la ecuación lineal $\boldsymbol{a}(\mathbf{x}) \cdot \nabla u(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) = 0$, con $\boldsymbol{a}(\mathbf{x}) = (a_1(\mathbf{x}), a_2(\mathbf{x}), a_3(\mathbf{x}))$, y $a_i(\mathbf{x}) = (-1)^i x_i$, $(i = 1, 2, 3)$:
   (a) Calcula la variedad característica (plano normal al vector $\boldsymbol{a}(\mathbf{x})$ de coeficientes de la ecuación) en cada punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.
   (b) Obtén una condición para que la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$, definida como la gráfica de la aplicación $g : V \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ no sea característica a la ecuación en ningún punto, es decir, para que $\boldsymbol{a}(\mathbf{x}) \notin T_S(\mathbf{x})$, $\forall\, \mathbf{x} \in S$.

2. Resuelve los siguientes problemas de Cauchy asociados a ecuaciones en derivadas parciales lineales de primer orden:

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{l} x u_x(x,y,z) + 2y u_y(x,y,z) + u_z(x,y,z) - 3u(x,y,z) = 0 \\ u(x,y,0) = \operatorname{sen}(x+y) \end{array} \right.$$

$$\text{(b)} \left\{ \begin{array}{l} u_x(x,y,z) - 2u_y(x,y,z) + xy u_z(x,y,z) = \cos x \\ u(x,x,z) = 0 \end{array} \right.$$

3. Obtén la solución de la ecuación en derivadas parciales:

$$y u_x(x,y,z) - x u_y(x,y,z) + u_z(x,y,z) = 0$$

que verifica cada una de las siguientes condiciones de Cauchy:
   (a) $u(x,y,z) = x$, sobre $S = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z > 0\big\}$
   (b) $u(x,y,z) = \beta$, sobre $S = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x^2 + y^2 < 1,\ z = 1\big\}$

4. Resuelve el problema

$$\left. \begin{array}{l} y u_x(x,y,z) - x u_y(x,y,z) + u_z(x,y,z) = x, \\ u = \pi, \ \text{sobre } S \end{array} \right\}$$

siendo $S = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x^2 + y^2 < 1,\ z = 1\big\}$.

5. Al describir el comportamiento de un fluido isentrópico unidimensional mediante las ecuaciones de Euler, si suponemos conocidos el cociente $-p_x/\rho = x + p_0 \cos t$ $(p_0 \in \mathbb{R})$ y la velocidad inicial del fluido en cada punto, se obtiene el siguiente problema de Cauchy,

$$\left. \begin{array}{ll} u_t(t,x) + u(t,x) u_x(t,x) = x + p_0 \cos t, & t, x > 0 \\ u(0,x) = u_0, & x > 0 \end{array} \right\}$$

Resuélvelo usando el método de las características (febrero 2001).

6. Utiliza el método de las características para resolver el siguiente problema de contorno asociado a una ecuación cuasilineal de primer orden,

$$\left. \begin{array}{l} u_t(t,x) + u(t,x) u_x(t,x) = \alpha u(t,x) + 1 \\ u(t,0) = \beta, \quad (\beta \in \mathbb{R}) \end{array} \right\}$$

siendo $\alpha \in \mathbb{R}$ (septiembre 2001).

7. Encuentra la solución de la ecuación cuasilineal

$$u_t(t,x) + u^2(t,x) u_x(t,x) = \beta \cos t, \qquad t > 0,\ x > 0$$

para la condición inicial $u(0,x) = x$, $x > 0$ (enero 2002).

8. Estudia mediante el método de las características el siguiente problema de condición inicial para la ecuación general asociada a las leyes de conservación unidimensionales,

$$\left. \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \dfrac{\partial}{\partial x} \Phi(u(t,x)) = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{array} \right\}$$

siendo $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 y $u_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua.

9. Resuelve la siguiente ecuación cuasilineal asociada a modelos de ondas de choque (shock-waves):

$$u_t(t,x) + \cos\left(u(t,x)\right) u_x(t,x) = \beta, \quad t > 0,\ x > 0$$

para las siguientes condiciones inicial y de contorno:
   (a) $u(0,x) = \alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$
   (b) $u(t,0) = 0$
   (c) $u(0,x) = h(x)$, $x > 0$, siendo $h : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ inyectiva (diciembre 2001).

10. Encuentra las soluciones de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + (x + u(t,x)) \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = \cos(\omega t), \qquad t > 0,\ x > 0$$

$(\omega \in \mathbb{R})$, que inicialmente son constantes, es decir, $u(0,x) = \beta$.

11. Dado el problema,

$$\left. \begin{array}{ll} (1 - \varepsilon t) u_t(t,x) + x u_x(t,x) = 1, & t > 0,\ x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = \phi(x), & x \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

con $\varepsilon > 0$ constante y $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua:

(a) Utiliza el método de las características para obtener la solución.
(b) Calcula el intervalo tenporal en el que está definida la solución, para cada $x \in \mathbb{R}$ fijo.
(c) ¿Qué ocurre con la ecuación y las soluciones cuando $\varepsilon \to 0$.

(junio 2005).

12. Estudia la existencia de solución del problema de Cauchy

$$\left.\begin{array}{l} u(x,y)u_x(x,y) + u_y(x,y) = \beta, \\ u(x,x) = \alpha \end{array}\right\}$$

en función de los valores de las constantes α y β.

13. Encuentra la solución del problema

$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x) + \Phi(u(t,x))u_x(t,x) = u(t,x), & t>0,\ x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = \alpha, & x \in \mathbb{R} \end{array}\right\}$$

con $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 y $\alpha \in \mathbb{R}$ constante.

14. Dado el problema

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha u_t(t,x) + \left(u^2(t,x) - 1\right) u_x(t,x) = \cos(\omega t), & t,x>0 \\ u(t,0) = t, & t>0 \end{array}\right\}$$

(a) Encuentra su solución usando el método de las características.
(b) ¿Está dicha solución definida en el punto $(1,0)$? Razona la respuesta.

(febrero 2006).

15. La ecuación de Buckley-Leverett

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \beta(t)\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\Phi(u(t,x))\right) = 0, & t>0,\ x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \qquad (\clubsuit)$$

aparece asociada a modelos de difusión de petróleo en medios porosos. Suponiendo que $\alpha > 0$, β es una función continua, Φ es de clase C^1 y φ es inyectiva:

(a) Comprueba que el problema ($\clubsuit$) puede resolverse usando el método de las características.
(b) Demuestra que la solución verifica la ecuación implícita:

$$x = \frac{\Phi'(u(t,x))}{\alpha}\int_0^t \beta(r)\,dr + \varphi^{-1}(u(t,x))$$

(c) Encuentra la solución en el caso particular $\Phi(u) = u^2/2$, $\varphi(x) = x$.

(junio 2006).

16. Dada la ecuación de tipo Buckley-Leverett generalizada

$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x) + \Phi(t,u(t,x))u_x(t,x) = f(t), & t>0,\ x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \end{array}\right\}$$

con $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas y $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ inyectiva:

(a) Comprueba que el problema anterior puede resolverse usando el método de las características.
(b) Demuestra que la solución verifica la ecuación implícita:

$$x = \varphi^{-1}(u(t,x) - F(t)) + \int_0^t \Phi(r, u(t,x) - F(t) + F(r))\,dr$$

siendo

$$F(s) = \int_0^s f(r)\,dr$$

(c) Encuentra la solución en el caso particular $\Phi(t,u) = \beta(t)u$, β continua, $\varphi(x) = x$ y $f(t) = \cos(t)$.

(septiembre 2006).

17. Dado el problema de valor inicial para la ecuación de Burgers:

$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x) + u(t,x)u_x(t,x) = 0, & t>0,\ x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = f(x), & x \in \mathbb{R} \end{array}\right\}$$

(a) Comprueba que la solución verifica la ecuación implícita:

$$u(t,x) = f(x - tu(t,x))$$

(b) Utiliza el Teorema de la función implícita para demostrar que si para todo $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$, entonces las soluciones del problema anterior están definidas en todo el dominio temporal $]0,+\infty[$ para cada $x \in \mathbb{R}$.
(c) ¿Qué ocurre si $f(x) = x^2$?

18. Si se considera el problema del ejercicio anterior con un término fuente lineal en u:

$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x) + u(t,x)u_x(t,x) = \alpha(t)u(t,x), & t>0,\ x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = f(x), & x \in \mathbb{R} \end{array}\right\}$$

con $\alpha : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función:

(a) Comprueba que la ecuación implícita que verifica en este caso la solución es:

$$\Phi(t)u(t,x) = f\left(x - t\Phi(t)u(t,x) - u(t,x)\int_0^t s\alpha(s)\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\,ds\right)$$

con $\Phi(r) = e^{-\int_0^r \alpha(\tau)d\tau}$.
(b) Obtén la expresión de la ecuación implícita para el caso particular en que α es una función característica,

$$\alpha(t) = \left\{\begin{array}{ll} 1, & t<T \\ 0, & t \geq T \end{array}\right.$$

siendo $T > 0$ constante.

19. Dado el problema:

$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x) + (1+\varepsilon u(t,x))\,u_x(t,x) = u(t,x), & t>0,\ x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = x^2, & x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \qquad (\mathcal{P}_\varepsilon)$$

con $\varepsilon > 0$ una constante:

(a) Utiliza el método de las características para obtener la solución de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$.

(b) ¿Está dicha solución definida en todo el dominio $[0,+\infty[\times\mathbb{R}$? ¿Por qué?

(c) Comprueba que cuando $\varepsilon\to 0$, las soluciones de los problemas $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ convergen a la solución del problema

$$\left.\begin{array}{ll} u_t(t,x)+u_x(t,x)=u(t,x), & t>0,\ x\in\mathbb{R} \\ u(0,x)=x^2, & x\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \qquad (\mathcal{P}_0)$$

(febrero 2007).

20. Sea el problema de Cauchy

$$\left.\begin{array}{ll} u^2(x,y)u_x(x,y)+u_y(x,y)=u(x,y)+1, & x,y\in\mathbb{R} \\ u(x,x)=\alpha, & x\in\mathbb{R} \end{array}\right\} \qquad (\clubsuit)$$

con α constante.

(a) Discute para qué valores del parámetro α es posible utilizar el Método de las características para encontrar la solución de $(\clubsuit)$ y obtén la forma explícita de dicha solución en los casos en los que sea posible.

(b) ¿Cuál es el dominio de definición de las soluciones obtenidas en el apartado anterior?

(c) ¿Existe algún valor de α para el que no pueda aplicarse el Método de las características? ¿Tiene en ese caso solución el problema $(\clubsuit)$? ¿Por qué?

(septiembre 2008)