Fundamentos Matemáticos
Examen de Julio (Tipo A)
Arquitecto Técnico
6-7-2009. 9.30-12.30h

Apellidos, Nombre:
DNI: **GRUPO:**

Introduce las respuestas en los recuadros. Los cálculos se entregan en hojas aparte, junto con esta hoja. Una respuesta no acompañada de los cálculos y/o razonamientos correspondientes contará negativamente.

1. Estima el valor de $\sqrt{\frac{1}{3}}$ utilizando un polinomio de Taylor de grado 3 de la función $f(x) = \sqrt{x}$ en el punto $x_0 = \frac{1}{4}$
Respuesta: (en fracción, sin decimales)

$$P_3(\tfrac{1}{3}) = \boxed{\frac{499}{864}} \quad \textbf{1.25p}$$

Usando el resto de Lagrange, calcula qué grado n debe tener el polinomio de Taylor para que el error cometido sea menor que 10^{-5}.
Respuesta: $n \geq \boxed{6}$ **1.5p**

2. Sea la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$\begin{aligned} T(1,1,1) &= (1,1,1) \\ T(0,2,3) &= (9,10,8) \\ T(0,0,3) &= (8,8,7) \end{aligned}$$

Calcula:

a) La matriz M de la transformación lineal T respecto a la base canónica **1p**

$$M = \begin{pmatrix} -13/6 & 1/2 & 8/3 \\ -8/3 & 1 & 8/3 \\ -11/6 & 1/2 & 7/3 \end{pmatrix}$$

b) Los autovalores (de mayor a menor)**1p**

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1/2$, $\lambda_3 = -1/3$

c) La matriz de paso (columnas en el mismo orden que los autovalores) **1p**

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

d) La matriz de paso inversa **0.75p**

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e) La potencia infinita de M **0.75p**

$$M^{\infty} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Dadas las dos rectas:

$$R = \left\{ \begin{array}{r} 2x + z = -1 \\ 2x + y + z = 1 \end{array} \right. , R' = \left\{ \begin{array}{r} 2x + y = 5 \\ 2x + y + z = 3 \end{array} \right.$$

Calcula:

a) Un punto P_0 de R y otro P_0' de R' (te doy la primera coordenada):**0.5p**

$P_0 = (1, \boxed{2}, \boxed{-3}), P_0' = (1, \boxed{3}, \boxed{-2})$

b) Un vector director $\vec{d}$ de R y otro $\vec{d'}$ de R' (te doy la primera coordenada):**0.5p**

$\vec{d} = (1, \boxed{0}, \boxed{-2}), \vec{d'} = (1, \boxed{-2}, \boxed{0})$

c) Calcula la distancia entre R y R' por mínimos cuadrados. Para ello define la distancia al cuadrado entre un punto $P = P_0 + \alpha\vec{d}$ de R y otro punto $P' = P_0' + \beta\vec{d'}$ de R' como una función de dos variables:

$$f(\alpha, \beta) = ||P - P'||^2$$

y calcula los valores α_0 y β_0 que hacen mínima la función $f(\alpha, \beta)$

$\alpha_0 = \boxed{-1/3}, \beta_0 = \boxed{1/3}$ **1p**

Calcula entonces la distancia entre R y R' como:

$d(R, R') = \sqrt{f(\alpha_0, \beta_0)} = \boxed{\sqrt{2/3}}$ **0.75p**

Fundamentos Matemáticos
Examen de Julio (Tipo B)
Arquitecto Técnico
6-7-2009. 9.30-12.30h

Apellidos, Nombre:
DNI: **GRUPO:**

Introduce las respuestas en los recuadros. Los cálculos se entregan en hojas aparte, junto con esta hoja. Una respuesta no acompañada de los cálculos y/o razonamientos correspondientes contará negativamente.

1. Estima el valor de $\sqrt{\frac{2}{5}}$ utilizando un polinomio de Taylor de grado 3 de la función $f(x) = \sqrt{x}$ en el punto $x_0 = \frac{1}{4}$
Respuesta: (en fracción, sin decimales)

$$P_3(\tfrac{2}{5}) = \frac{2537}{4000}$$ **1.25p**

Usando el resto de Lagrange, calcula qué grado n debe tener el polinomio de Taylor para que el error cometido sea menor que 10^{-3}.
Respuesta: $n \geq$ 5 **1.5p**

2. Sea la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$\begin{aligned} T(1,1,1) &= (1,1,1) \\ T(0,2,2) &= (-3,-4,-4) \\ T(0,0,3) &= (2,2,3) \end{aligned}$$

Calcula:

a) La matriz M de la transformación lineal T respecto a la base canónica **1p**

$$M = \begin{pmatrix} 5/2 & -13/6 & 2/3 \\ 3 & -8/3 & 2/3 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Los autovalores (de mayor a menor)**1p**

$\lambda_1 =$ 1 , $\lambda_2 =$ 1/3 , $\lambda_3 =$ −1/2

c) La matriz de paso (columnas en el mismo orden que los autovalores) **1p**

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

d) La matriz de paso inversa **0.75p**

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e) La potencia infinita de M **0.75p**

$$M^{\infty} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Dadas las dos rectas:

$$R = \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}, R' = \begin{cases} 2x + z = -1 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$$

Calcula:

a) Un punto P_0 de R y otro P_0' de R' (te doy la primera coordenada):**0.5p**

$P_0 = (1,$ 3 $,$ −2 $)$, $P_0' = (1,$ 2 $,$ −3 $)$

b) Un vector director $\vec{d}$ de R y otro $\vec{d'}$ de R' (te doy la primera coordenada):**0.5p**

$\vec{d} = (1,$ −2 $,$ 0 $)$, $\vec{d'} = (1,$ 0 $,$ −2 $)$

c) Calcula la distancia entre R y R' por mínimos cuadrados. Para ello define la distancia al cuadrado entre un punto $P = P_0 + \alpha\vec{d}$ de R y otro punto $P' = P_0' + \beta\vec{d'}$ de R' como una función de dos variables:

$$f(\alpha, \beta) = ||P - P'||^2$$

y calcula los valores α_0 y β_0 que hacen mínima la función $f(\alpha, \beta)$

$\alpha_0 =$ 1/3 , $\beta_0 =$ −1/3 **1p**

Calcula entonces la distancia entre R y R' como:

$d(R, R') = \sqrt{f(\alpha_0, \beta_0)} = \sqrt{2/3}$ **0.75p**

Soluciones examen FMAT julio 2009

Título de la nota 06/07/2009

① $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = \frac{1}{4}$, $P_3(x) = \frac{1}{4} + x - \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^3$ $\quad \frac{1}{4} < \theta < \frac{1}{3}$

A) $\boxed{P_3\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{499}{864}}$, B) $\boxed{P_3\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{2537}{4000}}$ $\quad R_n(x,\theta) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}\left(x-\frac{1}{4}\right)^{n+1} \leq \frac{f^{(n+1)}\left(\frac{1}{4}\right)}{(n+1)!}\left(x-\frac{1}{4}\right)^{n+1} = E_n(x)$

A) $x = \frac{1}{3} \to E_3 \simeq 2'4 \cdot 10^{-4}$, $E_4 \simeq 5'6 \cdot 10^{-5}$, $E_5 \simeq 1'4 \cdot 10^{-5}$, $E_6 \simeq 3'7 \cdot 10^{-6} < 10^{-5} \Rightarrow \overset{A}{\boxed{n \geq 6}}$

B) $x = \frac{2}{5} \to E_3 \simeq 2'5 \cdot 10^{-3}$, $E_4 \simeq 1'06 \cdot 10^{-3}$, $E_5 \simeq 4'78 \cdot 10^{-4} < 10^{-3} \Rightarrow \overset{B}{\boxed{n \geq 5}}$

② TIPO A

$$M_T(B_c) = \boxed{\begin{pmatrix} -\frac{13}{6} & \frac{1}{2} & \frac{8}{3} \\ -\frac{8}{3} & 1 & \frac{8}{3} \\ -11/6 & 1/2 & 7/3 \end{pmatrix}} = \frac{1}{6} \overbrace{\begin{pmatrix} -13 & 3 & 16 \\ -16 & 6 & 16 \\ -11 & 3 & 14 \end{pmatrix}}^{M'} = M = \frac{1}{6} M'$$

$$|M - \lambda I| = -\lambda^3 + \frac{7}{6}\lambda^2 - \frac{1}{6} = 0 \quad \text{ó también} \quad |M' - \sigma I| = -\sigma^3 + 7\sigma^2 - 36 = 0$$

donde $\sigma = 6\lambda$. Del enunciado $T(1,1,1) = (1,1,1)$ sabemos que $\vec{v}_1 = (1,1,1)$ es autovector de M con autovalor $\lambda = 1 \Rightarrow \sigma_1 = 6$, con lo cual, haciendo Ruffini en $-\sigma^3 + 7\sigma^2 - 36 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 7 & 0 & -36 \\ 6 & & -6 & 6 & 36 \\ \hline & -1 & 1 & 6 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow \quad -\sigma^2 + \sigma + 6 = 0 \Rightarrow \sigma = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{-2} \begin{matrix} \nearrow -2 \\ \searrow 3 \end{matrix}$$

$$\lambda = \frac{\sigma}{6} = \frac{6}{6}, \frac{3}{6}, \frac{-2}{6} = \boxed{1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Vectores propios:

1) $\lambda_1 = 1 \Rightarrow \boxed{\vec{v}_1 = (1,1,1)}$ (del enunciado)

2) $\lambda_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \sigma_2 = 3 \Rightarrow (M' - 3I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (x,y,z) \propto \boxed{(1,0,1) = \vec{v}_2}$

3) $\lambda_3 = -\frac{1}{3} \Rightarrow \sigma_3 = -2 \Rightarrow (M' + 2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (x,y,z) \propto \boxed{(2,2,1) = \vec{v}_3}$

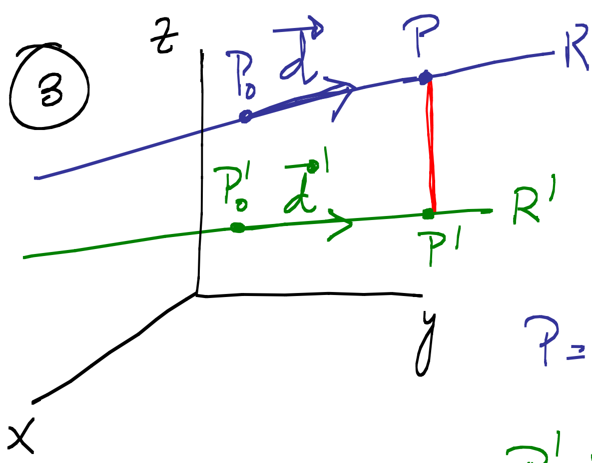
De manera que:

$$P = (\vec{v}_1 | \vec{v}_2 | \vec{v}_3) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \Rightarrow \boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{M^{\infty}} = P D^{\infty} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

Idem para tipo B.

(3)



$\boxed{P_0 = (1,2,-3)}$ $\quad \boxed{\vec{d} \propto \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1,0,2) \propto (1,0,-2)}$

$\boxed{P_0' = (1,3,-2)}$ $\quad \boxed{\vec{d}' \propto \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1,-2,0)}$

$$P = P_0 + \alpha \vec{d} = (1,2,-3) + \alpha(1,0,-2) = (1+\alpha, 2, -3-2\alpha)$$

$$P' = P_0' + \beta \vec{d}' = (1,3,-2) + \beta(1,-2,0) = (1+\beta, 3-2\beta, -2)$$

$$P - P' = (\alpha - \beta,\ -1+2\beta,\ -1-2\alpha)$$

$$f(\alpha,\beta) = \| P - P' \|^2 = (\alpha-\beta)^2 + (-1+2\beta)^2 + (-1-2\alpha)^2$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \alpha} &= \cancel{2}(2+5\alpha-\beta) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \beta} &= \cancel{2}(-2-\alpha+5\beta) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\alpha_0 = -\frac{1}{3}},\ \boxed{\beta_0 = \frac{1}{3}}$$

$$\boxed{d(R,R')} = \sqrt{f(\alpha_0,\beta_0)} = \left((\alpha_0-\beta_0)^2 + (-1+2\beta_0)^2 + (-1-2\alpha_0)^2\right) = \boxed{\sqrt{\frac{2}{3}}}$$

Idem para Tipo B cambiando R por R'.