Fundamentos Matemáticos
Examen de Febrero (Tipo A)
Arquitecto Técnico
5-2-2009. 9.30-12.30h

Apellidos, Nombre:
DNI: **Grupo:**

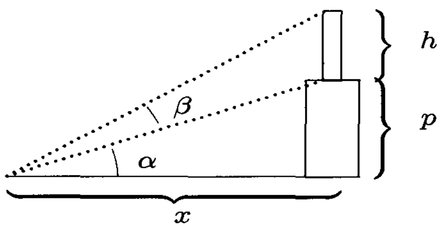
Introduce las respuestas en los recuadros. Los cálculos se entregan en hojas aparte, junto con esta hoja. Una respuesta no acompañada de los cálculos y/o razonamientos correspondientes contará negativamente.

1. Una estatua de altura $h = 2$ se encuentra sobre un pedestal de altura $p = 3$ (véase figura). ¿A qué distancia x del pedestal hay que situarse para que el ángulo β con que se ve la estatua sea máximo?. Pasos a seguir (simplifica las expresiones):

   a) Expresa $\tan(\beta)$ como una función $f(x)$.
   Ayuda: $\tan(a \pm b) = \frac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a)\tan(b)}$
   $f(x) = \boxed{2x/(15+x^2)}$ **0.75p**

   b) Calcula los extremos relativos x_0 de $f(x)$ (que también serán los extremos de $\tan(\beta)$ y, por lo tanto, de β).
   $x_0 = \boxed{\pm\sqrt{15}}$ **1p**

   c) Comprueba que se trata de un máximo calculando la derivada segunda de $f(x)$ y evaluándola en el/los puntos del apartado anterior.
   $f(x_0) = \boxed{-1/(15\sqrt{15})}$ **1p**



2. Dados los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:

$$H_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \, x + y - 2z = 0\},$$
$$H_2 = \langle (1, -1, 0), (2, -3, 3) \rangle,$$
$$H_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{array} \},$$
$$H_4 = \langle (1, -2, 3) \rangle,$$

calcula:

   a) Ecuaciones implícitas de $\boxed{(H_1^\perp \cap H_4^\perp)^\perp} \cap \boxed{((H_1 \cap H_2) + H_4)}$
   $\boxed{3x+3y+2z=0}$ **1p** $= \boxed{0.5} + \boxed{0.5}$

   b) Una base de $\boxed{(H_1 + H_4)^\perp} + \boxed{(H_3 \cap H_2 \cap H_1)}$
   $\boxed{(1,-1,0)}$ **1p** $= \boxed{0.5} + \boxed{0.5}$

   c) La proyección de $\vec{p}$ sobre H en la dirección de S en los siguientes casos:

      1) $\vec{p} = (2, -3, 1)$, $H = H_3 + H_4$, $S = H_1^\perp$.
      $\boxed{(5,-5,0)/2}$ **0.75p**

      2) $\vec{p} = (1, 1, -6)$, $H = H_2$, $S = H_1 \cap H_3$.
      $\boxed{\text{S.C.I. muchas soluc.}}$ **0.5p**

      3) $\vec{p} = (1, 2, 1)$, $H = H_1$, $S = H_1^\perp$.
      $\boxed{(5,11,8)/6}$ **0.5p**

      4) $\vec{p} = (1, 1, 1/3)$, $H = H_2$, $S = (H_3 + H_4)^\perp$.
      $\boxed{(0,0,0)}$ **0.25p**

      5) $\vec{p} = (1, 1, -5)$, $H = H_2$, $S = H_3$.
      $\boxed{\text{S.I. no existe solución}}$ **0.25p**

      6) $\vec{p} = (1, 3, 2)$, $H = H_1$, $S = H_4$.
      $\boxed{(1,3,2)}$ **0.25p**

3. Dada la superficie definida por la ecuación

$$z = f(x, y) = \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^{3/2} x^3$$

se pide:

   a) Dirección $\vec{h}$ de máxima pendiente en el punto $P_1 = (-4, 3)$. **0.25p**
   $\vec{h}_{max} \propto \boxed{(-4,3)}$

   b) Dirección $\vec{h}$ de mínima pendiente en el punto $P_2 = (4, 3)$. **0.25p**
   $\vec{h}_{min} \propto \boxed{(3,-4)}$

   c) Calcula la máxima pendiente en P_1. **0.75p**
   $D_{max} f(-4, 3) = \boxed{75}$

   d) Calcula la matriz hessiana de f en P_1

$$Hf(-4, 3) = \begin{pmatrix} \boxed{\frac{123}{5}} & \boxed{\frac{-36}{5}} \\ \boxed{\frac{-36}{5}} & \boxed{\frac{102}{5}} \end{pmatrix}$$ **1p**

   e) Calcula los autovalores de $Hf(-4, 3)$
   $\lambda_1 = \boxed{15}$, $\lambda_2 = \boxed{30}$ **0.5p**

Las notas y soluciones se publicarán en el tablón y en mi página web el próximo **lunes día 9** de febrero.
Revisión de examen los días: **9** (de 11 a 14 y de 17 a 18 horas) y **10** (de 12 a 14 horas)

Fundamentos Matemáticos
Examen de Febrero (Tipo B)
Arquitecto Técnico
5-2-2009. 9.30-12.30h

Apellidos, Nombre:

DNI: **Grupo:**

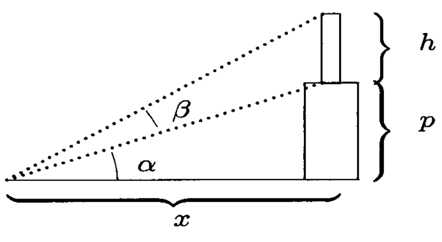
Introduce las respuestas en los recuadros. Los cálculos se entregan en hojas aparte, junto con esta hoja. Una respuesta no acompañada de los cálculos y/o razonamientos correspondientes contará negativamente.

1. Una estatua de altura $h = 3$ se encuentra sobre un pedestal de altura $p = 2$ (véase figura). ¿A qué distancia x del pedestal hay que situarse para que el ángulo β con que se ve la estatua sea máximo?. Pasos a seguir (simplifica las expresiones):

   a) Expresa $\tan(\beta)$ como una función $f(x)$.
   Ayuda: $\tan(a \pm b) = \frac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a)\tan(b)}$
   $f(x) = \boxed{3x/(10+x^2)}$ **0.75p**

   b) Calcula los extremos relativos x_0 de $f(x)$ (que también serán los extremos de $\tan(\beta)$ y, por lo tanto, de β).
   $x_0 = \boxed{\pm\sqrt{10}}$ **1p**

   c) Comprueba que se trata de un máximo calculando la derivada segunda de $f(x)$ y evaluándola en el/los puntos del apartado anterior.
   $f(x_0) = \boxed{-3/(20\sqrt{10})}$ **1p**



2. Dados los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:

$$H_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \, x - 2y + z = 0\},$$
$$H_2 = \langle (1, 0, -1), (2, 3, -3) \rangle,$$
$$H_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{array}{c} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{array} \},$$
$$H_4 = \langle (1, 3, -2) \rangle,$$

calcula:

   a) Ecuaciones implícitas de $(H_1^{\perp} \cap H_4^{\perp})^{\perp} \cap ((H_1 \cap H_2) + H_4)$
   $\boxed{3x + y + 3z = 0}$ **1p** = 0.5 + 0.5

   b) Una base de $(H_1 + H_4)^{\perp} + (H_3 \cap H_2 \cap H_1)$
   $\boxed{(1, 0, -1)}$ **1p** = 0.5 + 0.5

   c) La proyección de $\vec{p}$ sobre H en la dirección de S en los siguientes casos:

   1) $\vec{p} = (2, 1, -3)$, $H = H_3 + H_4$, $S = H_1^{\perp}$.
   $\boxed{(5/2, 0, -5/2)}$ **0.75p**

   2) $\vec{p} = (1, 1, 2)$, $H = H_1$, $S = H_1^{\perp}$.
   $\boxed{(5, 8, 11)/6}$ **0.5p**

   3) $\vec{p} = (1, -6, 1)$, $H = H_2$, $S = H_1 \cap H_3$.
   $\boxed{\text{S.C.I.}}$ **0.5p**

   4) $\vec{p} = (1, -5, 1)$, $H = H_2$, $S = H_3$.
   $\boxed{\text{S.I.}}$ **0.25p**

   5) $\vec{p} = (1, 1/3, 1)$, $H = H_2$, $S = (H_3 + H_4)^{\perp}$.
   $\boxed{(0, 0, 0)}$ **0.25p**

   6) $\vec{p} = (1, 2, 3)$, $H = H_1$, $S = H_4$.
   $\boxed{(1, 2, 3)}$ **0.25p**

3. Dada la superficie definida por la ecuación

$$z = f(x, y) = \left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)^{3/2} y^3$$

se pide:

   a) Dirección $\vec{h}$ de máxima pendiente en el punto $P_1 = (3, -4)$. **0.25p**
   $\vec{h}_{max} \propto \boxed{(3, -4)}$

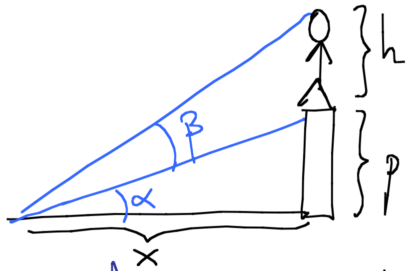
   b) Dirección $\vec{h}$ de mínima pendiente en el punto $P_2 = (3, 4)$. **0.25p**
   $\vec{h}_{min} \propto \boxed{(-4, 3)}$

   c) Calcula la máxima pendiente en P_1. **0.75p**
   $D_{max} f(3, -4) = \boxed{75}$

   d) Calcula la matriz hessiana de f en P_1
   $$Hf(3, -4) = \begin{pmatrix} \frac{102}{5} & \frac{-36}{5} \\ \frac{-36}{5} & \frac{123}{5} \end{pmatrix}$$ **1p**

   e) Calcula los autovalores de $Hf(3, -4)$
   $\lambda_1 = \boxed{15}$, $\lambda_2 = \boxed{30}$ **0.5p**

Las notas y soluciones se publicarán en el tablón y en mi página web el próximo **lunes día 9** de febrero.
Revisión de examen los días: **9** (de 11 a 14 y de 17 a 18 horas) y **10** (de 12 a 14 horas)

① 

$$tg(\beta) = tg(\alpha+\beta-\alpha) = \frac{tg(\alpha+\beta) - tg(\alpha)}{1 + tg(\alpha+\beta)\,tg(\alpha)} = \frac{\frac{h+p}{x} - \frac{p}{x}}{1 + \frac{(h+p)p}{x^2}} = f(x)$$

Simplificando: $f(x) = \dfrac{hx}{hp+p^2+x^2}$

Tipo A: $h=2,\ p=3 \Rightarrow f(x) = \dfrac{2x}{15+x^2},\quad f'(x) = \dfrac{2(15-x^2)}{(15+x^2)^2} = 0 \Rightarrow x_0 = \pm\sqrt{15}$

$$\boxed{f''(x)\Big|_{x=\sqrt{15}} = \frac{4x(x^2-45)}{(x^2+15)^3}\Bigg|_{x=\sqrt{15}} = -\underbrace{\frac{1}{15\sqrt{15}}}_{-0'017} < 0} \Rightarrow \underline{\text{máximo}}$$

Tipo B $h=3,\ p=2 \Rightarrow f(x) = \dfrac{3x}{10+x^2},\quad f'(x) = \dfrac{3(10-x^2)}{(10+x^2)^2} = 0 \Rightarrow x_0 = \pm\sqrt{10}$

$$\boxed{f''(x)\Big|_{x=\sqrt{10}} = \frac{6x(x^2-30)}{(x^2+10)^3}\Bigg|_{x=\sqrt{10}} = -\underbrace{\frac{3}{20\sqrt{10}}}_{-0'047} < 0} \Rightarrow \underline{\text{máximo}}$$

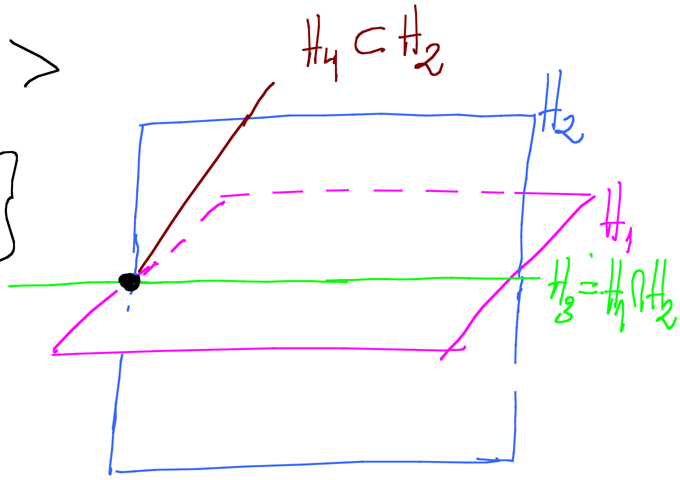
② Tipo A

$$H_1 = \{x+y-2z=0\} = \langle (1,1,1),(0,2,1) \rangle$$

$$H_2 = \langle (1,-1,0),(2,-3,3) \rangle = \{3x+3y+z=0\}$$

$$H_3 = \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{array} \right\} = \langle (1,-1,0) \rangle$$

$$H_4 = \langle (1,-2,3) \rangle = \left\{ \begin{array}{l} 2x+y=0 \\ 3y+2z=0 \end{array} \right\}$$



Echemos un vistazo a la situación relativa de H_1, H_2, H_3, H_4

$H_3 \subset H_2$ ya que $(x,y,z)=(1,-1,0)$ verifica $3x+3y+z=0$

$H_3 \subset H_1$ " " $x+y-2z=0$ $\Big\}\Rightarrow \boxed{H_3 = H_1\cap H_2}$

$\boxed{H_4 \subset H_2}$ ya que $(x,y,z)=(1,-2,3)$ verifica $3x+3y+z=0$

Como $H_3\subset H_2$, $H_4\subset H_2$ y $H_3 \neq H_4 \Rightarrow \boxed{H_3+H_4=H_2}$

También sabemos que $H_4 \not\subset H_1$ ya que $(x,y,z)=(1,-2,3)$ no verifica $x+y-2z=0$

por lo tanto $\boxed{H_1\cap H_4 = \langle \vec{0}\rangle}$ y $\boxed{H_1+H_4=\mathbb{R}^3}$

2.a

$$\underbrace{\Big(\underbrace{H_1^\perp \cap H_4^\perp}_{(H_1+H_4)^\perp=(\mathbb{R}^3)^\perp=\langle\vec{0}\rangle}\Big)^\perp}_{\langle\vec{0}\rangle^\perp=\mathbb{R}^3} \cap \underbrace{\Big(\big(\underbrace{H_1\cap H_2}_{H_3}\big)+H_4\Big)}_{H_3+H_4=H_2} = \mathbb{R}^3\cap H_2 = H_2 = \{3x+3y+z=0\}$$

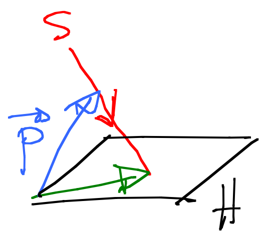
Leyes de Morgan

2.b

$$\underbrace{\big(\underbrace{H_1+H_4}_{\mathbb{R}^3}\big)^\perp}_{(\mathbb{R}^3)^\perp=\langle\vec{0}\rangle} + \underbrace{\big(H_3\cap \underbrace{H_2\cap H_1}_{H_3}\big)}_{H_3\cap H_3=H_3} = \langle\vec{0}\rangle + H_3 = H_3 = \langle(1,-1,0)\rangle$$

(Mirad las últimas 3 páginas de los apuntes EspacioRn.pdf)

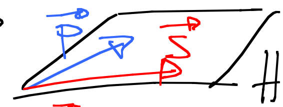
2.c.1 $\vec{p}\notin H = H_3+H_4 = H_2$, $S = H_1^\perp = \langle \underbrace{(1,1,-2)}_{\vec{s}}\rangle \not\subset H_2$



$$\vec{p} = \mathrm{Proy}_{H_2}^{H_1^\perp}(\vec{p}) + \beta\vec{s} = (x,y,z)+\beta(1,1,-2) = (2,-3,1) \Rightarrow$$

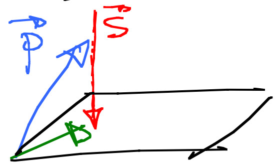
$$\left.\begin{array}{l}(x+\beta,\ y+\beta,\ z-2\beta) = (2,-3,1)\\ 3x+3y+z=0\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}3(2-\beta)+3(-3-\beta)+(1+2\beta)=0 \Rightarrow\\ 6-3\beta-9-3\beta+1+2\beta = -4\beta-2=0\Rightarrow\\ \beta=-1/2 \Rightarrow \mathrm{Proy}_{H_2}^{H_1^\perp}(\vec{p}) = \boxed{\left(\frac{5}{2}, \frac{-5}{2}, 0\right)}\end{array}$$

2.C.2 $\vec{p}=(1,1,-6)\in H_2$, $S=H_1\cap H_3=H_3\subset H_2 \Rightarrow$



$\boxed{S.C.I.}$ Compatible indeterminado

2.C.3 $S\perp H=H_1$, $\vec{p}\notin H$, $\vec{p}\parallel\vec{s} \Rightarrow$

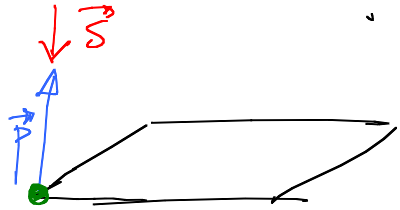


proyección ortogonal

$$\vec{p}\cdot\vec{s}=\beta\,\vec{s}\cdot\vec{s} \Rightarrow \beta=\frac{\vec{p}\cdot\vec{s}}{\vec{s}\cdot\vec{s}}=\frac{(1,2,1)\cdot(1,1,-2)}{(1,1,-2)\cdot(1,1,-2)}=\frac{1}{6}$$

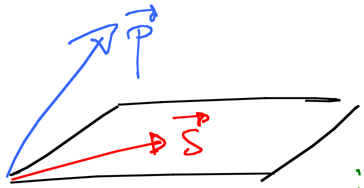
$$\text{Proy}^{H_1^\perp}_{H_1}(\vec{p})=\vec{p}-\beta\vec{s}=(1,2,1)-\frac{1}{6}(1,1,-2)=\boxed{\left(\frac{5}{6},\frac{11}{6},\frac{8}{6}\right)}$$

2.C.4 $S=(H_3+H_4)^\perp=H_2^\perp$, $\vec{p}\parallel\vec{s}$, $\vec{p}\notin H$



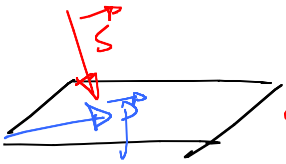
$$\text{Proy}^{S}_{H}(\vec{p})=\boxed{(0,0,0)}$$

2.C.5 $\vec{p}=(1,1,-5)\notin H=H_2$, $S=H_3\subset H$



$\boxed{S.I.}$ incompatible

2.C.6 $\vec{p}=(1,3,2)\in H=H_1$, $S=H_4\not\subset H$



$$\text{Proy}^{S}_{H}(\vec{p})=\boxed{\vec{p}=(1,3,2)}$$

El tipo B es igual cambiando $y\leftrightarrow z$, y $\left\{\begin{array}{l} 2.C.2 \leftrightarrow 2.C.3 \\ 2.C.4 \leftrightarrow 2.C.5 \end{array}\right\}$

3 Tipo A
$$z=\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)^{3/2}\cdot x^{\frac{3}{2}\cdot 2}=\left(x^2\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)\right)^{3/2}=\underline{\underline{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}}$$

simplifico

Tipo B
$$z=\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)^{3/2}\cdot y^{\frac{3}{2}\cdot 2}=\left(y^2\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)\right)^{3/2}=\underline{\underline{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}}$$

Curvas de nivel:

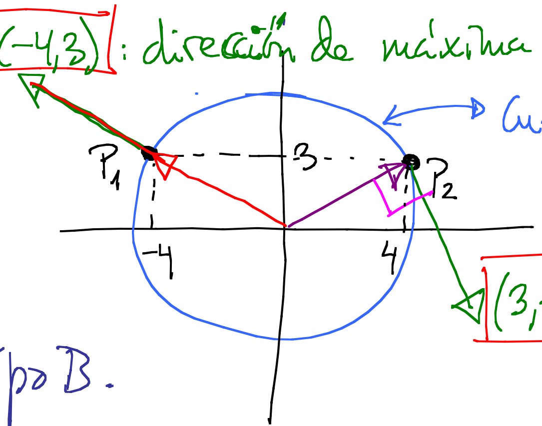
$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\gamma \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\gamma \end{array}\right\} \quad z = \left(r^2\cos^2\gamma + r^2\mathrm{sen}^2\gamma\right)^{3/2} = \left(r^2\underbrace{(\cos^2\gamma + \mathrm{sen}^2\gamma)}_{1}\right)^{3/2} = \boxed{r^3 = cte}$$

Circunferencias

3.a,b Tipo A

$\boxed{(-4,3)}$: dirección de máxima pendiente en $P_1 = (-4,3)$

Curva de nivel



$\boxed{(3,-4)}$: dirección de mínima (nula) pendiente en $P_2 = (4,3)$

Similar para tipo B.

3.c

Tipo A

Tipo B

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{(-4,3)\\(3,-4)}} = 3x\left(x^2+y^2\right)^{1/2}\Big|_{\substack{(-4,3)\\(3,-4)}} = \begin{cases} -60 \\ 45 \end{cases} \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{(-4,3)\\(3,-4)}} = 3y\left(x^2+y^2\right)^{1/2}\Big|_{\substack{(-4,3)\\(3,-4)}} = \begin{cases} 45 \\ -60 \end{cases}$$

$$D_{max} f\begin{smallmatrix}(-4,3)\\(3,-4)\end{smallmatrix} = \left\|\vec{\nabla} f\begin{smallmatrix}(-4,3)\\(3,-4)\end{smallmatrix}\right\| = \sqrt{60^2 + 45^2} = \boxed{75}$$

3.d

Tipo A

Tipo B

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{\substack{(-4,3)\\(3,-4)}} = \frac{3(2x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{1/2}}\Big|_{\substack{(-4,3)\\(3,-4)}} = \begin{cases} 123/5 \\ 102/5 \end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right| = \frac{3(x^2+2y^2)}{(x^2+y^2)^{1/2}}\Big| = \begin{cases} 102/5 \\ 123/5 \end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right| = \frac{3xy}{(x^2+y^2)^{1/2}}\Big| = \begin{cases} -36/5 \\ -36/5 \end{cases}$$

$$Hf(-4,3) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 123 & -36 \\ -36 & 102 \end{pmatrix}$$

$$Hf(3,-4) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 102 & -36 \\ -36 & 123 \end{pmatrix}$$

3.e $|H - \lambda I| = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = 30, 15}$ en ambos tipos A y B