Fundamentos Matemáticos

Examen de Septiembre (Tipo A)
Arquitecto Técnico
17-Septiembre-2007. <u>10-13h</u>

Apellidos, Nombre:
DNI: **Grupo:**

Introduce las respuestas en los recuadros. Los cálculos se entregan en hojas aparte, junto con esta hoja. Una respuesta no acompañada de los cálculos y/o razonamientos correspondientes contará negativamente.

1. Estima el valor de $\sqrt[3]{3/2}$ utilizando un polinomio de Taylor de grado 3 de la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en el punto $x_0 = 1$
   Respuesta: (en fracción, sin decimales)
   $P_3(3/2) = \boxed{\dfrac{743}{648}}$ **1.25p**
   Usando el resto de Lagrange, calcula qué grado n debe tener el polinomio de Taylor para que el error cometido sea menor que 10^{-4}.
   Respuesta: $n \geq \boxed{7}$ **1.25p**

2. Sea la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$\begin{aligned} T(2,1,2) &= (1,1/2,1) \\ T(0,-1,3) &= \frac{1}{3}(-2,8,-5) \\ T(0,0,3/2) &= (-1/2,7/4,-1) \end{aligned}$$

   Calcula:

   a) La matriz M de la transformación lineal T respecto a la base canónica **1p**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & -1/3 \\ -4/3 & 5/6 & 7/6 \\ 4/3 & -1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

   b) Los autovalores (de mayor a menor)**1p**

   $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1/2$, $\lambda_3 = -1/3$

   $\lambda^3 - \frac{7}{6}\lambda^2 + \frac{1}{6} = 0$

   c) La matriz de paso (columnas en el mismo orden que los autovalores) **1p**

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

   d) La matriz de paso inversa **0.75p**

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -2/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   e) La potencia infinita de M **0.75p**

$$M^{\infty} = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & -2/3 \\ -1 & 2/3 & 2/3 \\ 1 & -2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

3. Calcula por mínimos cuadrados la ecuación de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa más cerca de los siguientes cuatro puntos:

$$(x,y) = (2,0), (0,0), (0,-3), (1,-1)$$

   $a = 1/4$, $b = 1/4$, $c = -3/2$ **1.5p**

   Calcula la matriz hessiana y comprueba que se trata de un mínimo.**0.75p**

$$Hf(a,b,c) = \begin{pmatrix} 34 & 18 & 10 \\ 18 & 10 & 6 \\ 10 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

   Representa gráficamente (detrás de esta hoja) la parábola obtenida, calculando previamente los extremos relativos y los puntos de corte con los ejes.**0.75p**