Aplicación a problemas de máximos y mínimos

1. Demostrar que, entre los rectángulos de perímetro constante, el cuadrado es el de área máxima.

2. En los laboratorios se hacen filtros cónicos plegando un papel de filtro circular (Fig. 1). Si notamos por R al radio de dicho círculo, hallar la altura h que tiene que tener el cono para que su volumen $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ sea máximo (r es el radio de la base). Sol. $h = R/\sqrt{3}$

3. Demostrar que una tienda de campaña cónica de capacidad dada, requiere una cantidad mínima de tela cuando su altura es $\sqrt{2}$ veces mayor que el radio de la base.

4. La resistencia de una viga de sección rectangular es directamente proporcional a la anchura y al cubo de la altura. Hallar el ancho de la viga de máxima resistencia que podría obtenerse de un tronco de madera cilíndrico de 16cm de diámetro. Sol. 8cm

5. Se quiere construir un recipiente cilíndrico metálico con volumen 32 cm^3. ¿Cuánto ha de medir el radio de la base para que la cantidad de metal usado en su construcción sea mínimo?. a) si está tapado por ambos lados. b) Si está tapado por uno de sus lados. Sol. $R = 2(2/\pi)^{1/3}$, $R = 2(4/\pi)^{1/3}$

6. Una estatua de altura 4m. se encuentra sobre un pedestal de altura 2m. ¿A qué distancia del pedestal hay que situarse para que el ángulo α_2 sea máximo (Fig. 2). Ayuda: $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$. Sol. $\alpha_2 = \arctan(\sqrt{3}/3) = \pi/6$.

7. Un proyectil se dispara desde el origen de coordenadas en una dirección tal que forma un ángulo α con la horizontal. Si su trayectoria, supuesta nula la resistencia del aire, viene dada por $y(x) = \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} - x\tan\alpha$, donde v_0 es la velocidad inicial, hallar el ángulo α de manera que el alcance del tiro sea máximo. Sol. $\alpha = \pi/4$

8. En algunas reacciones químicas autocatalizadas, la velocidad de reacción viene dada por: $v(x) = kx^p(a-x)^q$ donde a denota la concentración de la sustancia de partida y x la de sustancia que se forma. Hallar la concentración x que corresponde al máximo de velocidad. Representar $v(x)$ para $p = q = 1$. Sol. $x = ap/(p+q)$.

9. Se quiere construir un canal abierto de capacidad máxima. La base y los lados del canal deben ser de 10 metros; además los costados deben estar igualmente inclinados respecto a la base. ¿Cual debe ser la anchura del canal por arriba?. Sol. 20m

10. Para disminuir en cuanto sea posible el rozamiento del líquido contra las paredes de un canal, el área mojada por el agua debe ser mínima. Demostrar que la mejor forma de un canal rectangular abierto de sección transversal de área dada es aquel en que su anchura es el doble que su altura.

11. Calcular el radio r y la altura h del cilindro de volumen $V(x,y,z) = \pi r^2 h = \pi(x^2+y^2)2z$ máximo inscrito en una esfera de radio R con ecuaciones $x^2+y^2+z^2 = R^2$.

12. Calcular el ortoedro de volumen máximo inscrito en un elipsoide de semiejes a, b, c.

13. Calcular una caja rectangular sin tapa de superficie mínima y volumen 32cm^3.

14. Determinar entre todos los triángulos de perímetro dado p el que tenga mayor área. (Sol. Triángulo equilátero.)

15. Hallar el paralelepípedo rectangular de área total A que tenga volumen máximo.(Sol. cubo de arista $\sqrt{A/6}$)

16. Hallar la distancia mínima entre las dos rectas $R_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x-1 = y/2 = z\}$ y $R_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = z\}$. Sol. $\sqrt{2}/2$