RELACIÓN DE PROBLEMAS. ARQUITECTURA TÉCNICA. 2003-2004

1. Discute $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to 0} f(x)$ para

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

con $a_n, b_m \neq 0$ y $n, m \in \mathbb{N}$, en los siguientes casos:

$$a)\ n > m > 0 \quad b)\ 0 < n < m \quad c)\ n = m > 0$$

2. Calcula $\lim_{x\to\pm\infty} |x|^\alpha a^x$ y $\lim_{x\to 0} |x|^\alpha a^x$, por L'Hôpital, en los siguientes casos:

$$\begin{array}{llll} a)\ \alpha = -1/2, a = 1/2 & b)\ \alpha = -3/2, a = 1/3 & c)\ \alpha = 1/2, a = 1/4 & d)\ \alpha = 2, a = 1/5 \\ e)\ \alpha = -1/2, a = 2 & f)\ \alpha = -3/2, a = 3 & g)\ \alpha = 1/2, a = 4 & h)\ \alpha = 2, a = 5 \end{array}$$

3. Calcula $\lim_{x\to\infty} |x|^\alpha \log_a |x|$ y $\lim_{x\to 0} |x|^\alpha \log_a |x|$, por L'Hôpital, en los siguientes casos:

$$a)\ \alpha = -1/2, a = 2 \quad b)\ \alpha = -3/2, a = 3 \quad c)\ \alpha = 1/2, a = e \quad d)\ \alpha = 3/2, a = 10$$

4. Calcula $\lim_{x\to\pm\infty} b^x \log_a |x|$ y $\lim_{x\to 0} b^x \log_a |x|$, por L'Hôpital, en los siguientes casos:

$$a)\ a = 2, b = 1/2 \quad b)\ a = e, b = 2$$

5. Hallar los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(ax)}{bx} \quad b)\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{\tan(\beta x)} \quad c)\ \lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen} x \quad b)\ \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

6. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{lll} a)\ f(x) = b^x \log_a |1/x| & b)\ f(x) = a^{-1/x^2} & c)\ f(x) = \operatorname{sen}^3(a \arccos(x)) \\ d)\ f(x) = \arctan(a \tan(ax)) & e)\ f(x) = \frac{\sqrt{1+\ln(\tan(x/2))}}{e^{-3\operatorname{sen}(5x)}} & f)\ f(x) = x^{1/x} \end{array}$$

7. Estima el valor de:

$$a)\ \ln(1/3) \quad b)\ e^{1/5} \quad c)\ \operatorname{sen}(\pi/6 + \pi/10) \quad d)\ \sqrt{5} \quad e)\ \cos(\pi/4 + \pi/15)$$

utilizando un polinomio de Taylor de grado 3 de las funciones

$$a)\ \ln(x) \quad b)\ e^x \quad c)\ \operatorname{sen}(x) \quad d)\ \sqrt{x} \quad e)\ \cos(x)$$

en los puntos

$$a)\ x_0 = 1 \quad b)\ x_0 = 0 \quad c)\ x_0 = \pi/6 \quad d)\ x_0 = 4 \quad e)\ x_0 = \pi/4$$

y da una cota del error cometido usando el resto de Lagrange.

8. Representa gráficamente las siguientes funciones:

$$\begin{array}{llll} a)\ f(x) = xe^{-3x} & b)\ f(x) = (x^2-2)e^{5x} & c)\ f(x) = x^3 e^{-x} & d)\ f(x) = x(x-1)(x-2) \\ e)\ f(x) = x^2(x^2-1) & f)\ f(x) = \frac{4}{x^2+3} & g)\ f(x) = \frac{x^2+8}{x-1} & h)\ f(x) = \frac{x^2}{x^2-1} \\ i)\ f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} & j)\ f(x) = x^2 \ln(x) & k)\ f(x) = \ln|x^2-5x+6| & l)\ f(x) = \sqrt{3x^2+8} \end{array}$$

9. Dados los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:

$$H_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \, 3x + y - 2z = 0\},$$
$$H_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \, x - y = 0, 2y - z = 0\}$$

Calcular:

(a) Una base ortonormal de H_1.

(b) La proyección ortogonal del vector $\vec{p} = (1,2,1)$ sobre H_1

(c) La proyección de $\vec{p}$ sobre H_1 en la dirección de H_2.

(d) La distancia del punto $(1,2,1)$ al plano H_1

(e) El ángulo que forma $\vec{p}$ con H_1.

(f) La situación relativa entre H_1 y la recta R que pasa por el punto $(0,0,a)$ y tiene por vector director $\vec{v} = (1,1,b)$ (discutir en función de a y b).

10. Dados los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:

$$H_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 / \, 2y + z = 0\}, \; H_2 = \langle (1,-1,2) \rangle$$
$$H_3 = \langle (1,1,1), (1,1,0) \rangle$$

Calcular:

(a) $H_1 \cap H_3, H_1^{\perp}, H_2^{\perp}, H_3^{\perp}, (H_1 \cap H_3)^{\perp} + H_2$

(b) Bases ortonormales de $H_1, H_2^{\perp}, H_3$

(c) Proyección de $\vec{p} = (0,0,-1)$ sobre los planos H_1 y H_3 en la dirección: a) ortogonal a dichos planos, b) en la dirección de H_2, c) en la dirección $(0,0,1)$.

(d) Determinar: a) el ángulo que forma $\vec{p}$ con H_1 y b) la distancia de $\vec{p}$ a H_1.

(e) Ángulo entre H_1 y H_3.

(f) La situación relativa entre H_1 y la recta R que pasa por el punto $(a,0,0)$ y tiene por vector director $\vec{v} = (1,1,b)$ (discutir en función de a y b).

11. Calcular el volumen del paralelepípedo generado por $\vec{u} = (3,2,5)$, $\vec{v} = (1,2,7)$ y $\vec{w} = (0,0,1)$.

12. Encuentre una ecuación para el plano que pasa por (-3,0,7) y es perpendicular al vector (5,2,-1). Sol. $5x + 2y - z = -22$

13. Encuentre el plano que pasa por (0,0,1), (2,0,0) y (0,3,0). Sol. $3x + 2y + 6z = 6$

14. Encuentre la distancia del punto $P = (1,1,1)$ a la recta $R_1 = \{x - 2y + z = 2, x - y = 0\}$ y a la recta $R_2 = \{x = 5 + 3\lambda, y = -2 + 5\lambda, z = \lambda\}$

15. Encuentre la distancia del punto (1,1,3) al plano $3x + 2y + 6z = 6$. Sol. $17/7$

16. Encontrar el ángulo entre los planos $3x - 6y - 2z = 15$ y $2x + y - 2z = 5$ Sol. $\arccos 4/21 = 1.38 rad$

17. Dadas las siguientes superficies:

$$\begin{array}{lll} a)\ f(x,y) = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} & b)\ f(x,y) = \frac{x^2}{\sqrt{1+2x^2-y}} & c)\ f(x,y) = \arctan(y/x) \\ d)\ f(x,y) = \frac{e^{-\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} & e)\ f(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2} & f)\ f(x,y) = \sqrt{1-(x/a)^2-(y/b)^2} \end{array}$$

Se pide:

(a) Escribe la ecuación $y = c_k(x)$ de las curvas de nivel $f(x,y) = k$ =constante. ¿En qué caso se trata de circunferencias?. ¿En qué caso se trata de un haz de rectas coincidentes en un punto ("escalera de caracol")?. Ayuda: escribe $f(x,y)$ en coordenadas polares en estos casos.

(b) Si tenemos dos gotas de agua situadas en $(x_1,y_1) = (-1,2)$ y $(x_2,y_2) = (1,-3)$, respectivamente, se pide:

i. Calcula la pendiente de la superficie (derivada direccional de f) en ambos puntos en la dirección de $\vec{h} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$.

ii. Calcula la dirección y el sentido en que es más probable que deslize la gota de agua en éstos puntos (contraria al gradiente).

iii. Calcula la máxima pendiente (derivada direccional máxima) en ambos puntos y di en qué punto el ritmo de bajada de la gota es más rápido.

(c) Calcula la ecuación de los planos tangentes a cada superficie en el punto $(x_1,y_1) = (-1,2)$

18. Estima mediante la diferencial dA el error cometido al medir el área $A = xy$ de una superficie rectangular de lados $x = 10cm$ e $y = 20cm$ cuando la precisión de nuestra regla llega hasta el milímetro. Hacer lo mismo con el volumen V de un cilindro de radio $r = 10cm$ y altura $h = 15cm$.

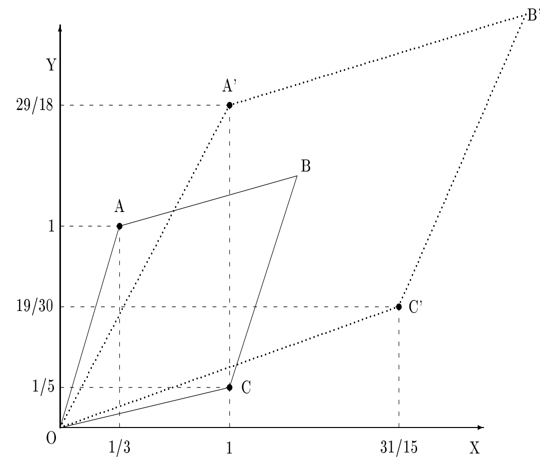
19. Estima mediante la diferencial dP el error que se comete al determinar la presión P como función del volumen V y la temperatura T en un mol ($N = 1$) de gas perfecto con ecuación de estado $PV = NRT$, cuando $V = 3 \pm 0.01\, m^3$ y $T = 300 \pm 5$ Kelvin. Dato: $R = 8.3$Jul.Kelvin^{-1}.mol^{-1}.

20. Se define la desviación vertical (en la dirección y) de un punto $P_i = (x_i, y_i)$ a la recta $y = R(x) = ax+b$, como $\delta(P_i, R) = y_i - R(x_i)$. Hallar la recta $y = R(x)$ que está más cerca de los siguientes tres puntos: $P_1 = (0,0), P_2 = (0,1), P_3 = (2,0)$. Ayuda: calcular el mínimo de la suma de los cuadrados de todas las desviaciones verticales, es decir, de $f(a,b) = \sum_{i=1}^{3} \delta(P_i,R)^2$. Comprueba que se trata de un mínimo mediante la matriz hessiana.

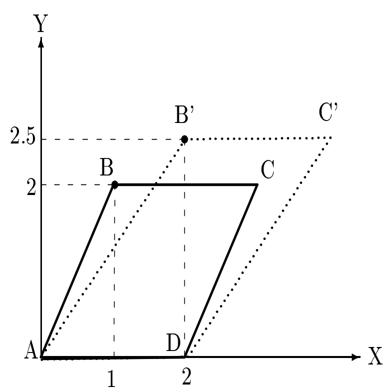
21. Se define la desviación vertical (en la dirección z) de un punto $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ al plano $z = K(x,y) = ax + by + c$, como $\delta(P_i, K) = z_i - K(x_i, y_i)$. Hallar el plano $z = K(x,y)$ que está más cerca de los siguientes cuatro puntos: $P_1 = (0,0,0), P_2 = (0,0,1), P_3 = (0,2,0)$ y $P_4 = (5,0,0)$. Ayuda: calcular el mínimo de la suma de los cuadrados de todas las desviaciones verticales, es decir, de $f(a,b,c) = \sum_{i=1}^{4} \delta(P_i,K)^2$. Comprueba que se trata de un mínimo mediante la matriz hessiana. Respuesta: $a = -1/10, b = -1/4, c = 1/2$

22. Demuestra que el gradiente $\vec{\nabla} f(x,y)$ de una función escalar $z = f(x,y)$ es perpendicular a las curvas de nivel $f(x,y)$ =cte en cada punto. Dibuja de forma cualitativa las curvas de nivel (cotas) y la dirección del gradiente en las proximidades de: a) la cúspide (punto más alto) de una montaña, b) una hondonada del terreno y c) una silla de montar

23. Determina la matriz $M_T(B_c)$ de la transformación lineal T correspondiente a la deformación del paralelogramo OABC de la figura, respecto a la base canónica $B_c = \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}$ (coincidente con los ejes coordenados X, Y). ¿Se trata de una dilatación o una contracción?. Determina también los valores y los vectores propios de $M_T(B_c)$.



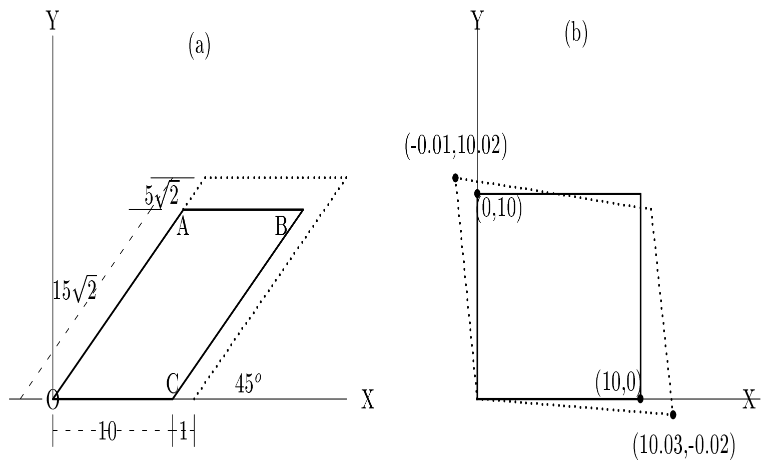
24. Determina la matriz $M_T(B_c)$ de la transformación lineal T correspondiente a la deformación del paralelogramo ABCD de la figura, respecto a la base canónica $B_c = \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}$ (coincidente con los ejes coordenados X, Y). ¿Se trata de una dilatación o una contracción?. Determina también los valores y los vectores propios de $M_T(B_c)$.



25. Determina la matriz $M_T(B_c)$ de la transformación lineal T respecto a la base canónica $B_c = \{\hat{\imath} = (1,0), \hat{\jmath} = (0,1)\}$, sabiendo que $T(1,2) = (7,5)$ y $T(-2,1) = (1,-5)$. Haz una representación gráfica de dicha transformación. ¿Se trata de una dilatación o una contracción?. Determina también los valores y los vectores propios de $M_T(B_c)$.

26. Determina la matriz $M_T(B_c)$ de la transformación lineal T respecto a la base canónica $B_c = \{\hat{\imath} = (1,0), \hat{\jmath} = (0,1)\}$, sabiendo que $T(2,1) = (5/2,3)$ y $T(1,1) = (3/2,5/2)$. Haz una representación gráfica de dicha transformación. ¿Se trata de una dilatación o una contracción?. Determina también los valores y los vectores propios de $M_T(B_c)$.

27. Determina la matriz $M_T(B_c)$ de la transformación lineal T correspondiente a la deformación del paralelogramo OABC de la figura, respecto a la base canónica $B_c = \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}$ (coincidente con los ejes coordenados X, Y). ¿Se trata de una dilatación o una contracción?. Determina también los valores y los vectores propios de $M_T(B_c)$.



28. Determinar la matriz $M_B(T)$ de la transformación correspondiente a la deformación del cubo de lado 1 de la figura 1 en la base canónica $B = \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$. ¿Se trata de una dilatación o una contracción?.

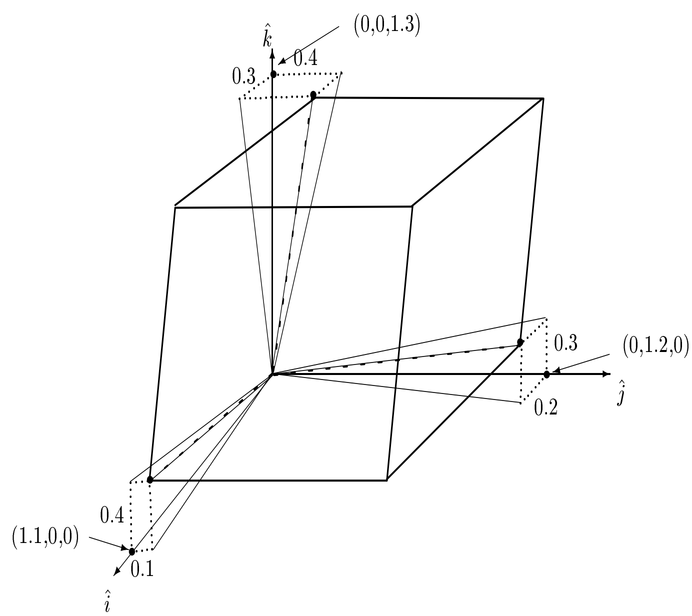


Figura 1: Deformación de un cubo de lado 1 con origen fijo

29. Calcula el determinante jacobiano de la transformación de coordenadas cartesianas a polares.

30. Calcula el determinante jacobiano de la transformación de coordenadas cartesianas a esféricas.

31. Deduce la expresión del gradiente $\vec{\nabla} f(r, \theta)$ de una función escalar $z = f(r, \theta)$ en coordenadas polares a partir de su expresión en coordenadas cartesianas.