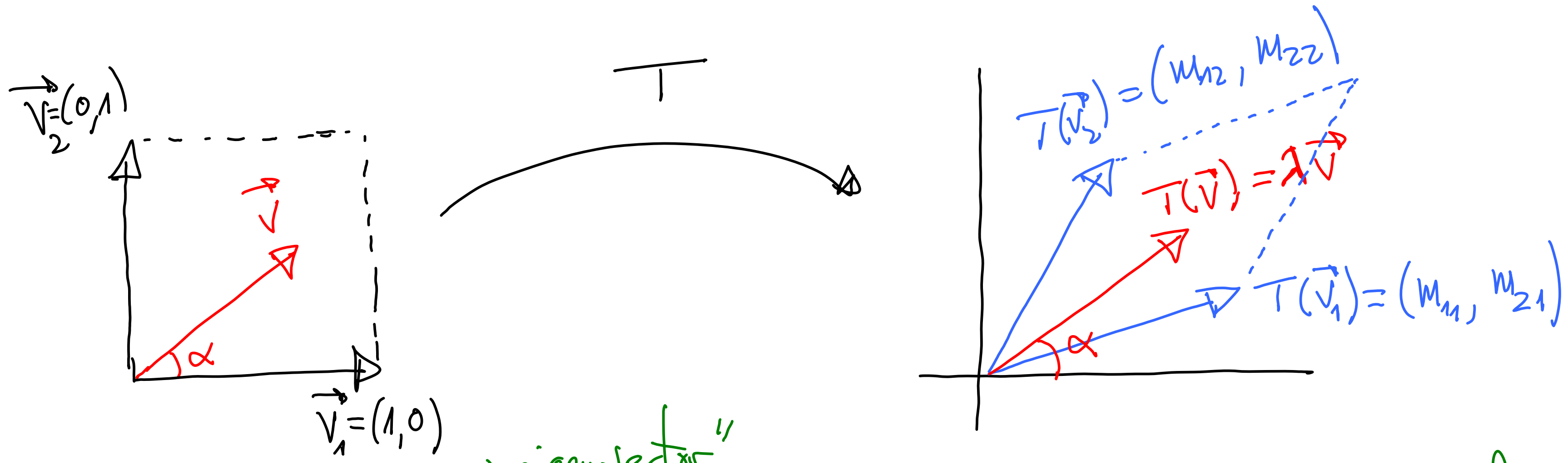
DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

Título de la nota 28/11/2008



$\vec{v}$ es vector propio ("eigenvector") (autovector) de la transformación T con valor propio λ (autovalor)

$\vec{v} \neq \vec{0}$

$$M_{B_c}(T) = \begin{array}{cc} T(1,0) & T(0,1) \\ \end{array}$$

$$M_{B_c}(T) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = M \quad \text{dato}$$

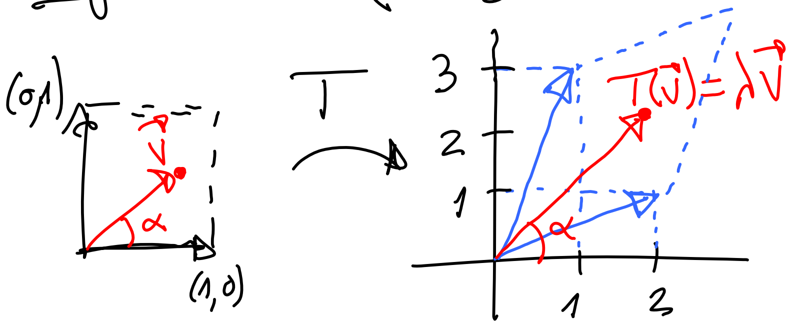
$$T(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \xRightarrow[\text{matricialmente}]{} M\vec{v} = \lambda\vec{v} = \lambda \underset{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}{\underset{\|}{I}}\,\vec{v} \Rightarrow$$

$$M\vec{v} - \lambda I \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \underbrace{(M-\lambda I)}_{A}\cdot\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow A\vec{v} = \vec{0}$$

Para que exista solución $\vec{v} \neq \vec{0}$ es necesario que $|A| = 0 \Rightarrow$

$\boxed{|M-\lambda I| = 0}$ Ecuación característica de M

Ej] $M = \begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}$ ("simétrica")



$$|M-\lambda I| = \left|\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right| =$$

$$= \begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ 1 & 3-\lambda\end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) - 1 = 0$$

$$6 - 5\lambda + \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_\pm = \frac{5 \pm \sqrt{25-20}}{2} \begin{cases} \boxed{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}} = 3'\ldots \\ \boxed{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}} = 1'\ldots \end{cases}$$

"dilatación"

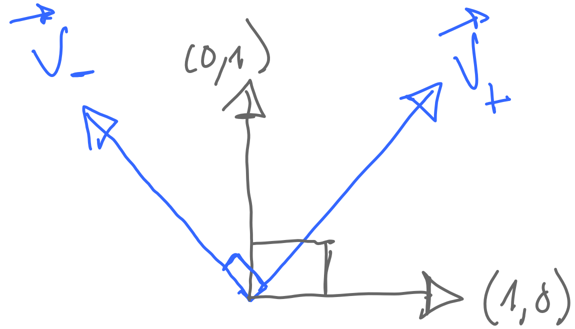
1) $\lambda_+ \Rightarrow (M - \lambda_+ I)\vec{v}_+ = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2-\lambda_+ & 1 \\ 1 & 3-\lambda_+ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \boxed{(2-\lambda_+)x + y = 0} \\ \cancel{x + (3-\lambda_+)y} = 0 \end{array}\right\}$$ dirección o eje principal 1

$$\vec{v}_+ = (x,y) = (1, \lambda_+ - 2) = \boxed{\left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}$$

eje principal 2

2) $\lambda_- \Rightarrow (M - \lambda_- I)\vec{v}_- = \vec{0} \Rightarrow \boxed{(2-\lambda_-)x + y = 0} \Rightarrow \vec{v}_- = (1, \lambda_- - 2) = \boxed{\left(1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}$



Comprobar que $\vec{v}_+ \cdot \vec{v}_- = 0$

$B_c = \{(1,0), (0,1)\}$, $B_p = \{\vec{v}_+, \vec{v}_-\}$

Base Canónica

Base de vectores propios

FÓRMULA DEL CAMBIO DE BASE

$$\underset{B_c}{M}(T) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = M, \qquad \underset{B_p}{M}(T) = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} = D$$

$T(1,0)$ $\quad$ $T(0,1)$

Coordenadas de $T(\vec{v}_+)$ en B_p

Coordenadas de $T(\vec{v}_-)$ en B_p

$T(\vec{v}_+) = \lambda_+ \vec{v}_+ \qquad T(\vec{v}_-) = \lambda_- \vec{v}_-$

$\lambda_+ \vec{v}_+ = \lambda_+ \vec{v}_+ + 0 \cdot \vec{v}_-$

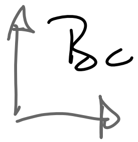
$\lambda_- \vec{v}_- = 0 \cdot \vec{v}_+ + \lambda_- \vec{v}_-$

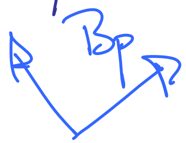
$B_c = \{(1,0), (0,1)\}$

$B_p = \{\vec{v}_+, \vec{v}_-\}$

$$\underbrace{\underset{B_c}{M}(T)}_{M} = \underbrace{\underset{B_p B_c}{M}(I)}_{P} \; \underbrace{\underset{B_p}{M}(T)}_{D} \; \underbrace{\underset{B_c B_p}{M}(I)}_{P^{-1}}$$

P: matriz de paso





$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^2, B_c) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "I"'] & (\mathbb{R}^2, B_c) \\
(\mathbb{R}^2, B_p) \arrow[r, "T"] & (\mathbb{R}^2, B_p) \arrow[u, "I"']
\end{tikzcd}$$

diagrama conmutativo

$$\boxed{M = P \cdot D \cdot P^{-1}}$$

Fórmula del Cambio de Base de B_c a B_p

$$M_{B_p B_c}(I) = \begin{pmatrix} \vec{v}_+ & \vec{v}_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} = P$$

Matriz del Cambio de base de B_p a B_c ó Matriz de paso

$$\vec{v}_+ = 1 \cdot \vec{v}_+ + 0 \cdot \vec{v}_- = 1\,(1,0) + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,(0,1)$$

$$\vec{v}_- = 0\,\vec{v}_+ + 1 \cdot \vec{v}_- = 1\,(1,0) + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\,(0,1)$$

Coordenadas de $\vec{v}_+$ y $\vec{v}_-$ en B_p

Coordenadas de $\vec{v}_+$ y $\vec{v}_-$ en B_c

Ej] Comprobar que $M = P D P^{-1}$, siendo:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \underbrace{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}_{\lambda_+} & 0 \\ 0 & \underbrace{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}_{\lambda_-} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{matrix}}_{\vec{v}_+} & \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{matrix}}_{\vec{v}_-} \end{pmatrix}.$$

$$P^{-1} = \frac{\overline{P}^{t}}{|P|} = \frac{\overline{P}^{t}}{|P|} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt5}{2} & -\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right) \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{t}}{-\sqrt5} = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt5}{2} & -1 \\ -\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right) & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{-\sqrt5}$$

$$|P| = \frac{1-\sqrt5}{2} - \frac{1+\sqrt5}{2} = -\sqrt5$$

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt5}{2} & \frac{1-\sqrt5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt5}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt5}{2} & -1 \\ -\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right) & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-\sqrt5} = \cdots\cdots$$

$$= \cdots\cdots\cdots = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ej] Comprobar que M verifica su ecuación característica.

$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $|M - \lambda I| = \lambda^2 - 5\lambda + 5 = 0$, ¿ $M^2 - 5M + 5 = 0$?

$\lambda \leftrightarrow M$

Comprobar

POTENCIA N-ÉSIMA DE UNA MATRIZ

$$M^n = \underbrace{M \cdot M \cdots M}_{n \text{ veces}}$$

Si la matriz M es diagonalizable $\Rightarrow M = PDP^{-1}$

$$M^2 = M \cdot M = PD\cancel{P^{-1}}\,\cancel{P}DP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

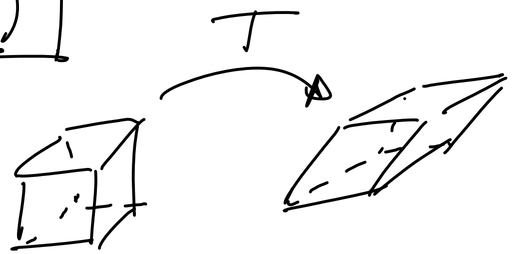
$$M^3 = M \cdot M \cdot M = PD\cancel{P^{-1}} \cdot \cancel{P}D\cancel{P^{-1}} \cdot \cancel{P}DP^{-1} = PD^3P^{-1}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\boxed{M^n} = M \cdots M = \quad \cdots \quad = \boxed{PD^nP^{-1}}$$

$$D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \lambda_p \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \lambda_2^n & \\ 0 & & \ddots \lambda_p^n \end{pmatrix}$$

Examen junio 2008 (Continuación)



$$\underset{B_c}{M(T)} = \frac{1}{3}\overset{M'}{\begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 4 & 5 & -6 \\ 4 & 4 & -5 \end{pmatrix}} = M$$

$T(1,0,0)$ $T(0,1,0)$ $T(0,0,1)$

Calcula D, P, P^{-1}, M^{∞}

a) ¿$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$? $\quad \overset{M'}{3M}\vec{v} = \overset{\sigma}{3\lambda}\vec{v} \quad \Rightarrow \quad |M - \lambda I| = 0$

$\vec{v} \neq \vec{0}$

$$M'\vec{v} = \sigma\vec{v} \Rightarrow |M' - \sigma I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-\sigma & 4 & -4 \\ 4 & 5-\sigma & -6 \\ 4 & 4 & -5-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\sigma)(5-\sigma)(-5-\sigma)-64-96-\{-16(5-\sigma)-24(3-\sigma)+16(-5-\sigma)\}=0$$

$$=-\sigma^3+3\sigma^2+\sigma-3=0 \Rightarrow \sigma^3-3\sigma^2-\sigma+3=0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & -1 & 3 \\ \boxed{\sigma=3} & & 3 & 0 & -3 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & \lfloor 0 \end{array}$$

$$\sigma^2-1=0 \Rightarrow \boxed{\sigma=\pm 1}$$

$$\boxed{\lambda_1=\frac{3}{3}=1,\ \lambda_2=\frac{1}{3},\ \lambda_3=-\frac{1}{3}}$$

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

b) Matriz de Paso $P=\begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{pmatrix}$

b.1) $M'\vec{v}_1=\underset{3}{\sigma_1}\vec{v}_1 \Rightarrow (M'-\sigma_1 I)\vec{v}_1=\vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3-3 & 4 & -4 \\ 4 & 5-3 & -6 \\ 4 & 4 & -5-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rango} = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 \cdot x + 4y - 4z = 0 \\ 4x + 2y - 6z = 0 \end{array}\right\}$$

Dirección o eje principal ①

$$\left.\begin{array}{l} y - z = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \end{array}\right\} \quad \vec{v}_1 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} \propto \boxed{(1, 1, 1)}$$

$\neq 0 \Rightarrow \text{rango} = 2$

$$b.2) \quad (M' - \sigma_2 I)\vec{v}_2 = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3-1 & 4 & -4 \\ 4 & 5-1 & -6 \\ 4 & 4 & -5-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\sigma_2 = 1$

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 4y - 4z = 0 \\ 4x + 4y - 6z = 0 \end{array}\right\}$$

Dirección o eje principal ②

$$\vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} \propto \boxed{(2, 1, 2)}$$

$$b.3) \quad (M' - \sigma_3 I)\vec{v}_3 = \vec{0} \quad \begin{pmatrix} 3+1 & 4 & -4 \\ 4 & 5+1 & -6 \\ 4 & 4 & -5+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x + 4y - 4z = 0 \\ 4x + 6y - 6z = 0 \end{array}\right\}$$

$\sigma_3 = -1$

Dirección o eje principal ③

$$\vec{v}_3 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \boxed{(0, 1, 1)}$$

$$P = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $$P^{-1} = \frac{\overline{P}^t}{|P|} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}^t \Big/ (-1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$|P| = -1$

d) $$M^\infty = P D^\infty P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^\infty & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^\infty & 0 \\ 0 & 0 & \left(-1/3\right)^\infty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$1^\infty = 1$, $\left(\frac{1}{3}\right)^\infty \to 0$, $\left(-1/3\right)^\infty \to 0$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = M^\infty$$

Problema 3 de la relación — Autovalores repetidos

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad M' = 3M \Rightarrow \lambda' = 3\lambda$$

$$|M' - \lambda' I| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda' & 2 & -2 \\ 0 & 3-\lambda' & 0 \\ -1 & 2 & 1-\lambda' \end{vmatrix} = 0 \;\cdots \Rightarrow \lambda' = 0, 3, 3$$

repetido

$\lambda' = 3$

rango = 1

$$(M' - 3I)\vec{V} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2-3 & 2 & -2 \\ 0 & 3-3 & 0 \\ -1 & 2 & 1-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \boxed{-x + 2y - 2z = 0}$$

Plano principal

$\vec{V}_1 = (0, 1, 1)$ y $\vec{V}_2 = (2, 0, -1)$ vectores propios de valor propio $\lambda = \frac{\lambda'}{3} = 1$

Una matriz M NO SERÁ DIAGONALIZABLE cuando:

1) Sus valores propios sean COMPLEJOS

2) El número de vectores propios independientes, correspondientes a un valor propio λ, NO COINCIDA con la multiplicidad de λ (es decir, el nº de veces que aparece repetido λ)

Nosotros trabajaremos siempre con matrices diagonalizables, como lo son, por ejemplo, las matrices SIMÉTRICAS.