

Lección 14

Sistemas hiperestáticos

Contenidos

14.1. Método de las fuerzas para el cálculo de sistemas hiperestáticos	180
14.2. Sistemas hiperestáticos sometidos a flexión	181
14.2.1. Aplicación del Teorema de las Fuerzas Virtuales	181
14.3. Ejercicios propuestos	181

14.1 Método de las fuerzas para el cálculo de sistemas hiperestáticos

Este método es válido para el cálculo de estructuras con hiperestaticidad externa¹ y/o con hiperestaticidad interna².

Las incógnitas en este método son fuerzas (esfuerzos o reacciones). El método consiste en escoger tantas incógnitas hiperestáticas como grado de hiperestaticidad presente la estructura. Tales incógnitas son aplicadas como cargas exteriores sobre la estructura inicial, exenta de los grados de libertad que estas incógnitas coaccionaban. De esta forma, la estructura original se transforma en una estructura isostática denominada *estructura isostática fundamental*. Por tanto, las reacciones y las leyes de esfuerzos de la estructura isostática fundamental son función de las cargas externas y de las reacciones hiperestáticas.

En la estructura hiperestática de la Figura 14.1 a), de grado de hiperestaticidad $h_a = 2$, se han escogido el momento en A y la reacción horizontal en B como incógnitas hiperestáticas. La estructura isostática fundamental es la mostrada en la Figura 14.1 b).

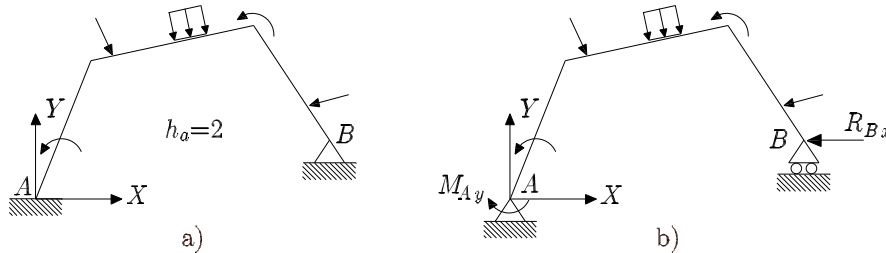


Figura 14.1 a) Estructura hiperestática. b) Estructura isostática fundamental

Debe verificarse que los desplazamientos en los grados de libertad suprimidos de la estructura hiperestática coincidan con los de la estructura isostática fundamental. Esto implica el planteamiento de tantas ecuaciones de compatibilidad de desplazamientos como incógnitas hiperestáticas. Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de compatibilidad se obtiene el valor de las incógnitas hiperestáticas.

Desde un punto de vista práctico, es necesario realizar los siguientes pasos para resolver un problema hiperestático:

1. Determinación del grado de hiperestaticidad, selección de las incógnitas hiperestáticas y obtención la estructura isostática fundamental
2. Obtención de las leyes de esfuerzos de la estructura isostática fundamental³
3. Planteamiento del sistema de ecuaciones de compatibilidad⁴

¹La estructura es interiormente isostática pero tiene un número excesivo de condiciones de apoyo.

²La estructura tiene un número excesivo de barras pero es externamente isostática.

³Serán función de las cargas exteriores, de las reacciones y de las incógnitas hiperestáticas.

⁴Tantas ecuaciones como grado de hiperestaticidad. Cada una de estas ecuaciones planteará la nulidad (o un valor concreto si el desplazamiento o giro tiene un valor conocido) del grado de libertad liberado en la estructura isostática fundamental.

4. Obtención de las incógnitas hiperestática mediante la resolución del sistema de ecuaciones de compatibilidad
5. Resolución de la estructura original con las reacciones hiperestáticas actuando como cargas exteriores

14.2 Sistemas hiperestáticos sometidos a flexión

14.2.1 Aplicación del Teorema de las Fuerzas Virtuales

El Teorema de las Fuerzas Virtuales es un método potente muy útil para la resolución manual de este tipo de problemas. Para el caso de la estructura hiperestática de la Figura 14.1 a), es necesario plantear junto a la estructura isostática fundamental mostrada en la Figura 14.1 b), dos estructuras virtuales, una por cada uno de los grados de libertad correspondientes a las incógnitas hiperestáticas. En la Figura 14.2 a) y en la Figura 14.2 b) se muestran dichas estructuras.

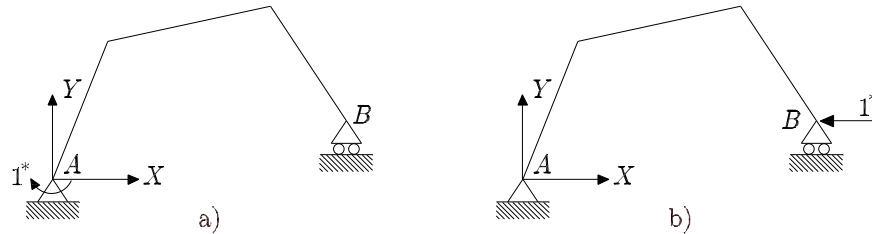


Figura 14.2 Estructuras virtuales: a) θ_A . b) u_B

Conocidas las leyes de esfuerzos de la estructuras isostática fundamental y de cada una de las virtuales, se plantean las ecuaciones de compatibilidad $\theta_A = 0$ y $u_B = 0$, utilizando el Principio de las Fuerzas Virtuales ⁵.

Del sistema formado por las dos ecuaciones de compatibilidad se despejan las incógnitas hiperestáticas M_{Ay} y R_{Bx} (Figura 14.1 b)). Sustituyendo sus valores en las leyes de esfuerzos y reacciones de la estructura isostática fundamental se obtienen las leyes de esfuerzos y reacciones de la estructura hiperestática inicial.

14.3 Ejercicios propuestos

Ejercicio 14.1

Para la estructura que se muestra en la Figura 14.3

Obtener:

1. Reacciones en los apoyos
2. La expresión analítica de las leyes de esfuerzos para los tramos $A-B$ y $C-B$

⁵Normalmente no se consideran las deformaciones debidas a los esfuerzos axiales, por lo que dicho término queda eliminado de la expresión del Principio de las Fuerzas Virtuales

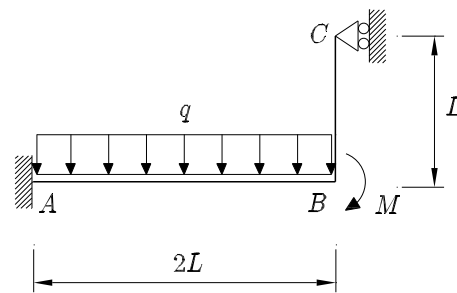


Figura 14.3 Estructura hiperestática de dos barras

Datos:

$$\begin{aligned}
 L &= 2 \text{ m} \\
 q &= 10 \text{ kN/m} , \quad M = 80 \text{ kN/m} \\
 E &= 210 \text{ GPa} \\
 I_y &= 2770 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4
 \end{aligned}$$

Solución:

1. Reacciones en los apoyos

$$R_{Ax} = 45,714 \text{ kN} (\rightarrow)$$

$$R_{Az} = 40 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$M_{Ay} = 68,572 \text{ kN}\cdot\text{m} (\curvearrowleft)$$

$$R_{Cx} = 45,714 \text{ kN} (\leftarrow)$$

2. La expresión analítica de las leyes de esfuerzos para los tramos $A-B$ y $C-B$

Tabla 14.1 Expresión analítica de las leyes de esfuerzos

Tramo	N_x	V_z	M_y
AB	-45,714	$40 - 10x$	$-5x^2 + 40x - 68,572$
CB	0	-45,714	$45,714x$

Ejercicio 14.2

El apoyo B de la estructura que se muestra en la Figura 14.4, ha sufrido un descenso Δw_B al aplicarle las cargas.

Obtener:

1. Reacciones en los apoyos
2. La expresión analítica de las leyes de esfuerzos para los tramos $A-B$ y $B-C$

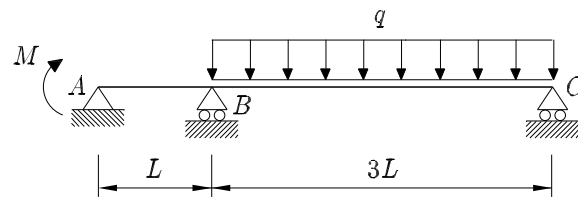


Figura 14.4 Viga continua con asiento diferencial en un apoyo

Datos:

$$\begin{aligned}
 L &= 2 \text{ m} \\
 q &= 10 \text{ kN/m} , \quad M = 60 \text{ kN/m} \\
 E &= 20 \text{ GPa} \\
 I_y &= 180 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4 \\
 \Delta w_B &= 5 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

Solución:

1. Reacciones en los apoyos

$$R_{Ax} = 0 \text{ kN}$$

$$R_{Az} = 48,375 \text{ kN} (\downarrow)$$

$$R_{Bz} = 84,5 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$R_{Cz} = 23,875 \text{ kN} (\uparrow)$$

2. La expresión analítica de las leyes de esfuerzos para los tramos $A-B$ y $B-C$

Tabla 14.2 Expresión analítica de las leyes de esfuerzos

Tramo	N_x	V_z	M_y
AB	0	-48,375	$-48,375x + 60$
BC	0	$-10x + 56,125$	$-5x^2 + 56,125x - 129$

Ejercicio 14.3

Para la estructura que se muestra en la Figura 14.5

Obtener:

1. El valor de M para que el desplazamiento vertical del punto C sea nulo
2. Reacciones en los apoyos, teniendo en cuenta el valor de M calculado en el apartado anterior
3. La expresión analítica de las leyes de esfuerzos para los tramos $A-B$ y $B-C$

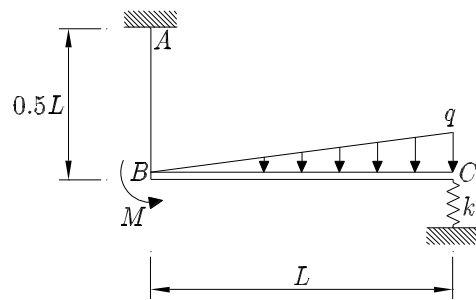


Figura 14.5 Estructura hiperestática de dos barras con apoyo elástico

Datos:

$$\begin{aligned}
 L &= 4 \text{ m} \\
 I_y &= 8,36 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4 \\
 q &= 20 \text{ kN/m} \\
 E &= 210 \text{ GPa} \\
 k &= 5 \cdot 10^3 \text{ kN/m}
 \end{aligned}$$

Solución:

1. El valor de M para que el desplazamiento vertical del punto C sea nulo

$$M = 165,333 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

2. Reacciones en los apoyos

$$R_{Ax} = 0 \text{ kN}$$

$$R_{Az} = 40 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$M_{Ay} = 58,667 \text{ kN}\cdot\text{m} (\curvearrow)$$

$$R_{Cz} = 0 \text{ kN}$$

3. La expresión analítica de las leyes de esfuerzos para los tramos $A-B$ y $B-C$

Tabla 14.3 Expresión analítica de las leyes de esfuerzos

Tramo	N_x	V_z	M_y
AB	40	0	58,667
BC	0	$-2,5x^2 + 40$	$-0,833x^3 + 40x - 106,667$