

# Lección 10

## Flexión simple

### Contenidos

---

10.1. Distribución de tensiones tangenciales estáticamente equivalentes a esfuerzos cortantes . . . . .	124
10.2. Distribución de tensiones tangenciales estáticamente equivalentes a esfuerzos cortantes en barras de sección maciza	124
10.3. Distribución de tensiones tangenciales estáticamente equivalentes a esfuerzos cortantes en barras de pared delgada	128
10.3.1. Secciones abiertas . . . . .	128
10.3.2. Secciones cerradas unicelulares . . . . .	130
10.4. Centro de esfuerzos cortantes . . . . .	131
10.5. Ejercicios propuestos . . . . .	133

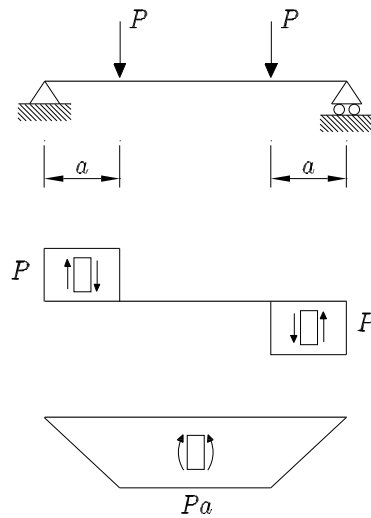
---

## 10.1 Distribución de tensiones tangenciales estáticamente equivalentes a esfuerzos cortantes

La flexión incluye generalmente tensiones tangenciales estáticamente equivalentes a algún esfuerzo cortante ( $V_y(x)$  y/o  $V_z(x)$ ), según se deduce de las ecuaciones de equilibrio

$$\frac{dM_y(x)}{dx} - V_z(x) = 0, \quad \frac{dM_z(x)}{dx} + V_y(x) = 0$$

en las que se han despreciado los momentos repartidos uniformemente.



**Figura 10.1** Viga sometida a flexión pura y flexión simple en tramos diferentes

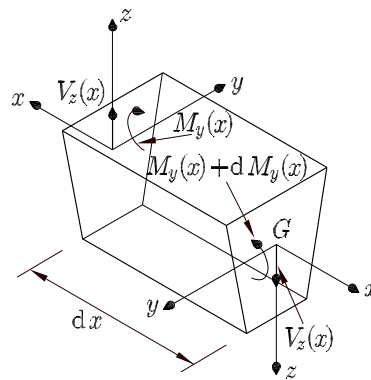
La viga de la Figura 10.1 está sometida a flexión pura en el tramo comprendido entre las dos cargas (donde la ley de flectores es constante), y a flexión más cortante en los otros dos tramos (donde la ley de flectores es variable). A la sollicitación de flexión más cortante se le denomina flexión simple.

## 10.2 Distribución de tensiones tangenciales estáticamente equivalentes a esfuerzos cortantes en barras de sección maciza

Si en una rebanada diferencial de una barra prismática, como la de la Figura 10.2, existe un esfuerzo cortante, constante en ambas caras, es porque existe una variación lineal del momento flector entre estas:

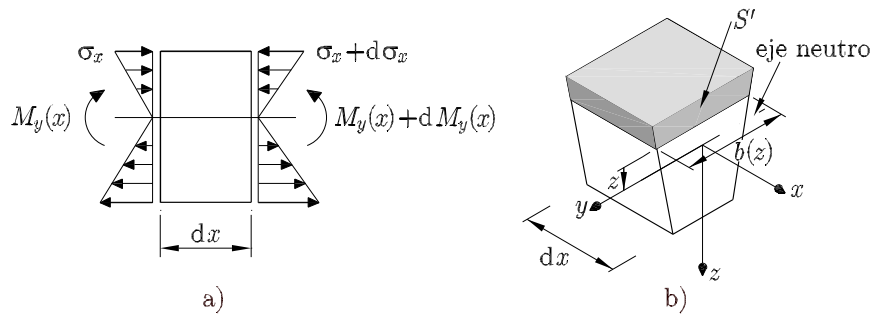
$$\frac{dM_y(x)}{dx} = V_z(x) = k \Rightarrow M_y(x) = kx$$

En el desarrollo que sigue se considerarán secciones simétricas respecto del eje  $z$ , con las cargas actuando en el plano de simetría  $XZ$ . El eje  $y$  pasa por el centro de gravedad de la sección y, junto con el  $z$ , son los ejes principales de inercia.



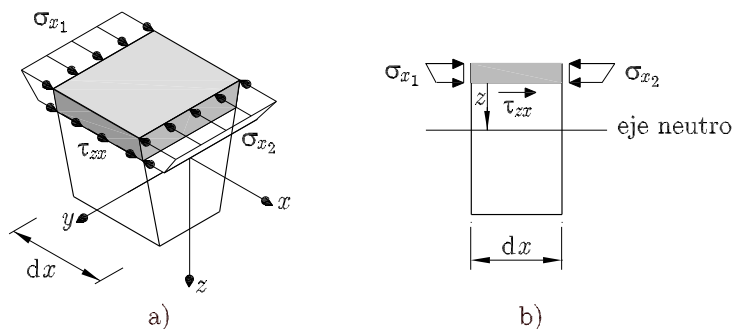
**Figura 10.2** Rebanada diferencial de un tramo de viga sometida a flexión simple

La distribución de tensiones normales en ambas caras de la rebanada se muestra en la Figura 10.3 a). La rebanada ha de estar en equilibrio, y cualquier trozo de ella, también. Sea un trozo de rebanada con su cara inferior a una altura  $z$  sobre el eje neutro, con ancho  $b(z)$  a dicha altura y área  $S'$  de la sección transversal, tal como se muestra en la Figura 10.3 b).



**Figura 10.3** Distribución de tensiones normales a ambos lados de una rebanada diferencial de un tramo de viga sometida a flexión simple

Estableciendo el equilibrio de fuerzas en el trozo de rebanada diferencial, como se muestra en la Figura 10.4



**Figura 10.4** Equilibrio de un trozo de la rebanada diferencial de un tramo de viga sometida a flexión simple

se obtiene

$$\int_{S'} \sigma_{x1}(x, y, z) \, dS + \tau_{zx}(x, y, z) \, b(z) \, dx - \int_{S'} \sigma_{x2}(x, y, z) \, dS = 0 \quad (10.1)$$

Las tensiones normales están producidas solo por el momento flector, por lo que se pueden sustituir por la expresión (9.4), obteniéndose

$$\int_{S'} \frac{M_y(x)}{I_y} z \, dS + \tau_{zx}(x, y, z) \, b(z) \, dx - \int_{S'} \frac{M_y(x) + dM_y(x)}{I_y} z \, dS = 0 \quad (10.2)$$

Operando, se obtiene

$$\frac{dM_y(x)}{I_y} \int_{S'} z \, dS - \tau_{zx}(x, y, z) \, b(z) \, dx = 0 \quad (10.3)$$

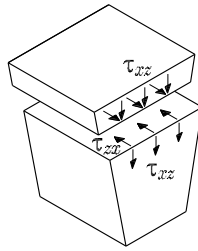
y despejando  $\tau_{zx}(x, y, z)$

$$\tau_{zx}(x, y, z) = \frac{1}{b(z)I_y} \frac{dM_y(x)}{dx} \int_{S'} z \, dS \quad (10.4)$$

La integral representa el momento estático del área  $S'$  respecto al eje  $y$ , que se denotará por  $Q_y(z)$ . Teniendo en cuenta que la derivada del momento flector respecto a  $x$  es el esfuerzo cortante, (10.4) toma la forma

$$\tau_{zx}(x, y, z) = \frac{Q_y(z)V_z(x)}{b(z)I_y} \quad (10.5)$$

A la vista de la Figura 10.4 a) y de la Figura 10.4 b), las tensiones calculadas son las contenidas en el plano de separación de los trozos de la rebanada diferencial, es decir, las *tensiones rasantes*. De acuerdo con el principio de reciprocidad de las tensiones tangenciales, las tensiones tangenciales en las caras de la rebanada diferencial con normal el eje  $x$ , son las tensiones rasantes, como se muestra en la Figura 10.5.



**Figura 10.5** Tensiones tangenciales en las caras de la rebanada diferencial

Por tanto,

$$\tau_{xz}(x, y, z) = \frac{Q_y(z)V_z(x)}{b(z)I_y} \quad (10.6)$$

Las secciones transversales de las barras sometidas a un esfuerzo cortante no se mantienen planas tras la deformación. Al ser variable, en general, la distribución de tensiones tangenciales sobre la sección, también varía la deformación angular. Esto se traduce en un alabeo de la sección transversal, como se muestra en la Figura 10.6.



**Figura 10.6** Alabeo de secciones sometidas a flexión simple

Este alabeo no afecta de forma importante a las deformaciones longitudinales, por lo que para el cálculo de las tensiones debidas a flexión simple se utilizan las expresiones deducidas en los apartados anteriores.

En general, si los ejes de la sección no son principales de inercia y existen esfuerzos cortantes en las direcciones de los ejes  $y$  y  $z$  simultáneamente, se puede demostrar que las expresiones de las distribuciones de tensiones tangenciales son

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(x, y, z) &= \\ &= \frac{1}{b(y)} \left( \frac{Q_z(y) I_y - Q_y(y) I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} V_y(x) + \frac{Q_y(y) I_z - Q_z(y) I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} V_z(x) \right) \end{aligned} \quad (10.7)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz}(x, y, z) &= \\ &= \frac{1}{b(z)} \left( \frac{Q_z(z) I_y - Q_y(z) I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} V_y(x) + \frac{Q_y(z) I_z - Q_z(z) I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} V_z(x) \right) \end{aligned} \quad (10.8)$$

Si los ejes son principales de inercia, las expresiones anteriores se simplifican:

$$\tau_{xy}(x, y, z) = \frac{1}{b(y)} \left( \frac{Q_z(y)}{I_z} V_y(x) + \frac{Q_y(y)}{I_y} V_z(x) \right) \quad (10.9)$$

$$\tau_{xz}(x, y, z) = \frac{1}{b(z)} \left( \frac{Q_z(z)}{I_z} V_y(x) + \frac{Q_y(z)}{I_y} V_z(x) \right) \quad (10.10)$$

Las expresiones de los momentos estáticos  $Q_y(y)$ ,  $Q_y(z)$ ,  $Q_z(y)$  y  $Q_z(z)$ , que aparecen en las ecuaciones anteriores son

$$Q_y(y) = S z_g \quad (10.11)$$

$$Q_y(z) = S z_g \quad (10.12)$$

$$Q_z(z) = S y_g \quad (10.13)$$

$$Q_z(y) = S y_g \quad (10.14)$$

El subíndice en la denominación del momento estático indica el eje respecto al cual se calcula. Entre paréntesis se señala la coordenada con la que varía el área del elemento cuyo momento estático se desea calcular.

Si la sección presenta simetría respecto del eje  $y$ , se verifica que  $Q_y(y) = 0$ ; y si la sección presenta simetría respecto del eje  $z$ , se verifica que  $Q_z(z) = 0$ . Obviamente, si la sección presenta doble simetría, ambos momentos estáticos serán nulos.

En la Figura 10.7 se muestra gráficamente el significado de estos momentos estáticos.

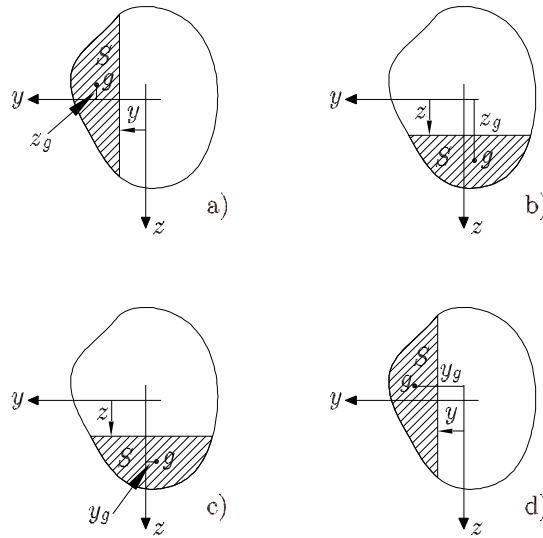


Figura 10.7 a)  $Q_y(y)$ . b)  $Q_y(z)$ . c)  $Q_z(z)$ . d)  $Q_z(y)$

### 10.3 Distribución de tensiones tangenciales estáticamente equivalentes a esfuerzos cortantes en barras de pared delgada

#### 10.3.1 Secciones abiertas

Sea una barra con sección transversal arbitraria, como la que se muestra en la Figura 10.8 a), que cumple las condiciones de pared delgada. Los ejes  $y$  y  $z$  son principales de inercia.

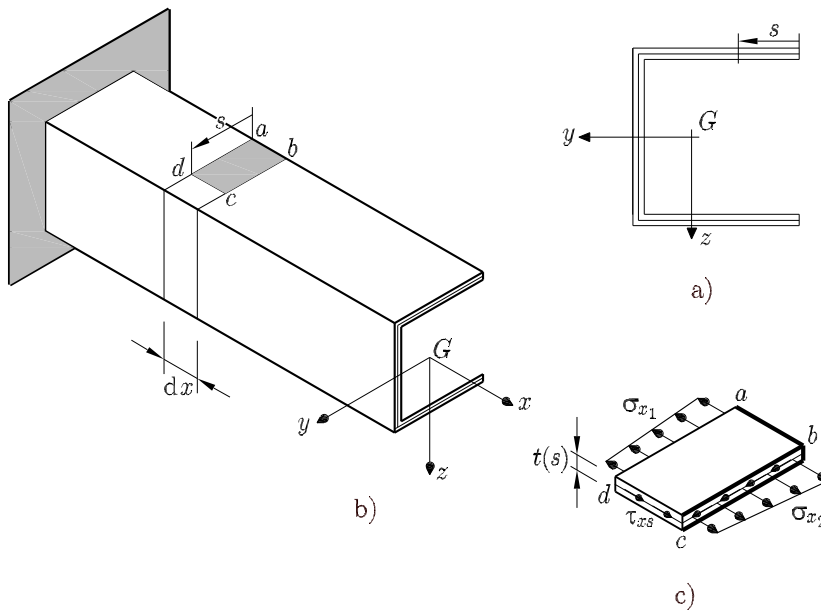


Figura 10.8 Barra prismática de sección transversal abierta de pared delgada

Se supondrá que el sistema de cargas es tal que provoca únicamente flexión en el plano  $XZ$ , siendo el eje  $y$  el eje neutro. La tensión normal en cualquier punto de la barra será

$$\sigma_x(x, s) = \frac{M_y(x)}{I_y} z \quad (10.15)$$

siendo  $s$  una coordenada curvilínea que se mide sobre la línea media del perfil (línea de trazos fina en la Figura 10.8) a partir del origen escogido.

Se estudiará un elemento de volumen diferencial,  $abcd$ , con uno de sus lados, el  $ab$ , coincidente con el borde de la sección. El otro lado tiene longitud  $s$ , medida a lo largo de la línea media de la sección, como se muestra en la Figura 10.8 b). Al igual que ocurría en las secciones macizas, la variación del momento flector a un lado y otro del volumen considerado implica tensiones diferentes a ambos lados, como se puede ver en la Figura 10.8 c) por lo que son necesarias las tensiones tangenciales para conseguir el equilibrio. El equilibrio del volumen diferencial considerado implica que

$$\tau_{xs}(x, s) t(s) dx + \int_0^s \sigma_{x2} dS - \int_0^s \sigma_{x1} dS = 0 \quad (10.16)$$

siendo  $t(s)$  el espesor del volumen diferencial (que puede variar con  $s$ ). Sustituyendo (10.15) en (10.16), se obtiene

$$\tau_{xs}(x, s) t(s) dx + \frac{M_{y2}(x)}{I_y} \int_0^s z dS - \frac{M_{y1}(x)}{I_y} \int_0^s z dS \quad (10.17)$$

y despejando la tensión tangencial se llega a la expresión

$$\tau_{xs}(x, s) = -\frac{dM_y(x)}{dx} \frac{1}{I_y t(s)} \int_0^s z dS = -\frac{V_z(x)}{I_y t(s)} \int_0^s z dS \quad (10.18)$$

donde se ha tenido en cuenta que la variación del momento flector respecto a  $x$ , es el esfuerzo cortante. La integral que aparece en (10.18) es el momento estático del trozo de sección transversal de longitud  $s$ , respecto al eje  $y$ . La ecuación (10.18) adopta una forma similar a la (10.6) obtenida para el caso de secciones macizas

$$\tau_{xs}(x, s) = -\frac{V_z(x) Q_y(s)}{I_y t(s)} \quad (10.19)$$

A diferencia de la distribución de tensiones en perfiles de sección maciza, en perfiles de pared delgada la tensión tangencial se supone constante en el espesor. Las tensiones tangenciales están dirigidas a lo largo de la línea media de la sección transversal y actúan paralelas a los bordes de la sección. Se define el flujo de tensiones en cualquier punto de la sección transversal como

$$q_{xs}(x, s) = \tau_{xs}(x, s) t(s) = -\frac{V_z(x) Q_y(s)}{I_y} \quad (10.20)$$

Al ser  $V_z$  e  $I_y$  constantes, el flujo de tensiones es directamente proporcional a  $Q_y(s)$ . En los extremos de las alas de la sección,  $Q_y(s)$  es cero, por lo que el flujo de tensiones también es cero. El valor máximo del flujo de tensiones, que varía de forma continua

de un extremo a otro de la sección, se obtiene en el eje neutro, donde  $Q_y(s)$  es máximo.

Si existen simultáneamente cortantes en las direcciones de los ejes  $y$  y  $z$ , la expresión 10.20 se transforma en

$$\tau_{xs}(x, s) = -\frac{V_y(x) Q_z(s)}{I_z t(s)} - \frac{V_z(x) Q_y(s)}{I_y t(s)} \quad (10.21)$$

Si los ejes no son principales de inercia, la distribución de tensiones tangenciales es

$$\begin{aligned} \tau_{xs}(x, s) &= \\ &= \frac{1}{t(s)} \left( -\frac{V_y(x) I_y - V_z(x) I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} Q_z(s) - \frac{V_z(x) I_z - V_y(x) I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} Q_y(s) \right) \end{aligned} \quad (10.22)$$

siendo el flujo de tensiones

$$\begin{aligned} q_{xs}(x, s) &= \\ &= -\frac{V_y(x) I_y - V_z(x) I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} Q_z(s) - \frac{V_z(x) I_z - V_y(x) I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} Q_y(s) \end{aligned} \quad (10.23)$$

### 10.3.2 Secciones cerradas unicelulares

El flujo de tensiones tangenciales viene dado por la expresión

$$q_V(x, s) = q_V(x, 0) + q_{V_A}(x, s) \quad (10.24)$$

siendo  $q_{V_A}(x, s)$  el flujo en  $s$  si la sección estuviera abierta en  $s = 0$  (la elección del origen de coordenada  $s$  es arbitraria)

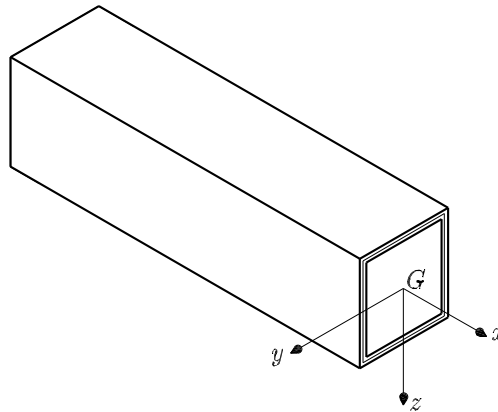
$$q_{V_A}(x, s) = -\frac{V_y(x) I_y - V_z(x) I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} Q_z(s) - \frac{V_z(x) I_z - V_y(x) I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} Q_y(s) \quad (10.25)$$

El cálculo de  $q_{V_A}(x, s)$  es directo, como se indicó anteriormente. Para determinar  $q_V(x, 0)$  se puede demostrar que la expresión es

$$q_V(x, 0) = \frac{-\int_0^S \frac{q_{V_A}(x, s)}{t(s)} ds}{\int_0^S \frac{1}{t(0)} ds} = \frac{-\int_0^S \frac{q_{V_A}(x, s)}{t(s)} ds}{\frac{S}{t(0)}} \quad (10.26)$$

En la Figura 10.9 se muestra una barra de sección transversal cerrada, unicelular. De la expresión (10.26) se deduce que para calcular la distribución de tensiones tangenciales estáticamente equivalentes a los esfuerzos cortantes que actúan en una sección cerrada de pared delgada, hay que definir en primer lugar el origen de coordenada curvilínea  $s$  y suponer que el perfil está abierto en dicho origen. Después se calcula  $q_{V_A}(x, s)$  aplicando la ecuación (10.25) y finalmente, tras deducir  $q_V(x, 0)$  usando la ecuación (10.26), se puede determinar el flujo de tensiones  $q_V(x, s)$  utilizando la expresión (10.24).

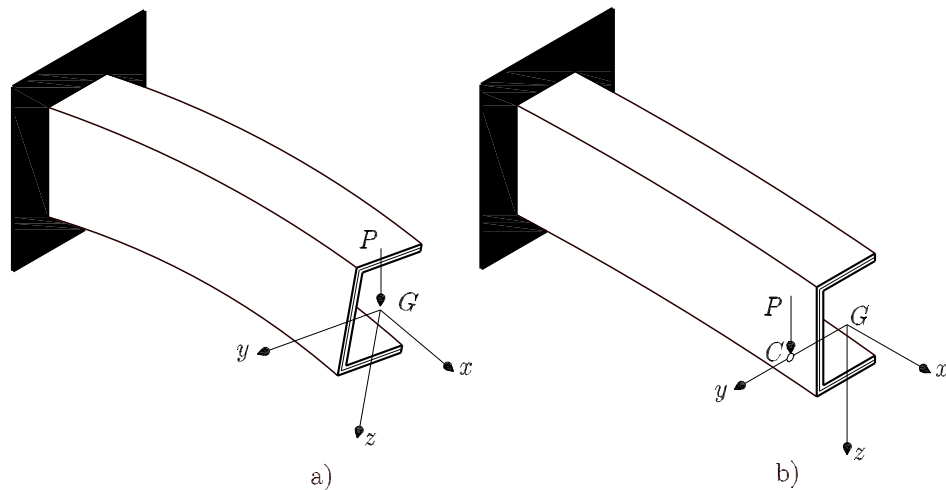




**Figura 10.9** Barra prismática de sección transversal cerrada, unicelular

## 10.4 Centro de esfuerzos cortantes

Si la distribución de tensiones tangenciales sobre una sección es estáticamente equivalente al esfuerzo cortante, debe verificarse la igualdad de resultante y de momentos respecto a cualquier punto del sistema formado por el esfuerzo cortante y la resultante de la distribución de tensiones tangenciales. La igualdad de la resultante se verifica siempre que la distribución de tensiones tangenciales se haya calculado correctamente. Sin embargo, en el desarrollo realizado para el cálculo de estas no se ha tenido en cuenta el punto de actuación de la carga (cortante).



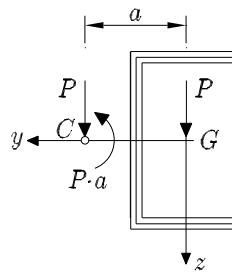
**Figura 10.10** Concepto de centro de esfuerzos cortantes

En la Figura 10.10 a) se ha considerado la carga  $P$  actuando en el centro de gravedad de la sección. La pieza se torsiona a la vez que flexa. Esta torsión es debida a que no existe equivalencia entre el momento que produce el esfuerzo cortante respecto a cualquier punto de la sección y el momento que produce la distribución de tensiones tangenciales. No obstante, existe un punto de aplicación del esfuerzo cortante que hace que se verifique dicha equivalencia. Este punto se denomina *centro de esfuerzos cortantes*. En la Figura 10.10 b) se muestra como al situar la carga  $P$  en el centro

de esfuerzos cortantes,  $C$ , la viga sólo flexa en el plano  $XZ$ .

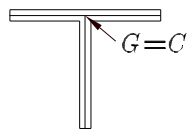
De lo comentado anteriormente se deducen la siguientes consecuencias:

- Para que una barra prismática sometida a la acción de una carga transversal  $P$  trabaje a flexión sin torsión, es necesario que dicha carga pase por el centro de esfuerzos cortantes de la sección en la que actúa. En caso contrario, se producirán en la sección además de tensiones tangenciales debidas a la carga  $P$ , tensiones tangenciales debidas a la acción del momento torsor  $M_x(x) = P a$ , siendo  $a$  la distancia desde el centro de esfuerzos cortantes al punto donde se ha aplicado  $P$ , como se muestra en la Figura 10.11.



**Figura 10.11** Torsión debida a la no aplicación de la carga en el centro de esfuerzos cortantes

- El centro de esfuerzos cortantes será un punto tal que, el momento de las fuerzas a que dan lugar las tensiones tangenciales respecto de él, sea nulo. Esto es evidente ya que, si sobre ese punto se aplica una carga  $P$ , el momento de esta fuerza respecto de dicho punto es nulo y ambos sistemas serían equivalentes. Esta propiedad permite determinar inmediatamente la posición del centro de esfuerzos cortantes en secciones ramificadas que concurren en un punto: como todas las tensiones tangenciales pasan por dicho punto, sus momentos respecto de dicho punto son nulos, y este será el centro de esfuerzos cortantes, como se muestra en la Figura 10.12.



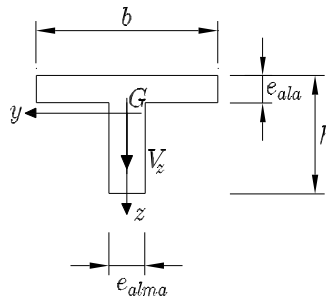
**Figura 10.12** Centro de esfuerzos cortantes en secciones ramificadas

- Si una sección tiene un eje de simetría, sobre él se encontrará el centro de esfuerzos cortantes. Si una sección tiene dos ejes de simetría, la intersección será el centro de esfuerzos cortantes.

## 10.5 Ejercicios propuestos

### Ejercicio 10.1

La sección transversal de una viga en T está sometida a un esfuerzo cortante  $V_z$ , según se muestra en la Figura 10.13.



**Figura 10.13** Sección llena en T sometida a esfuerzo cortante

Obtener:

1. Las propiedades estáticas de la sección: área  $S$  e inercias principales  $I_{y_G}$ ,  $I_{z_G}$
2. La expresión analítica de la distribución de tensiones tangenciales
3. La representación gráfica de la distribución de tensiones tangenciales

**Datos:**

$$h = 130 \text{ mm} , b = 200 \text{ mm} , e_{ala} = 30 \text{ mm} , e_{alma} = 40 \text{ mm}$$

$$V_z = 40 \text{ kN}$$

**Solución:**

1. Las propiedades estáticas de la sección: área  $S$  e inercias principales  $I_{y_G}$ ,  $I_{z_G}$

$$S = 100 \cdot 10^2 \text{ mm}^2$$

$$I_{y_G} = 1392,3 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_{z_G} = 2053,3 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

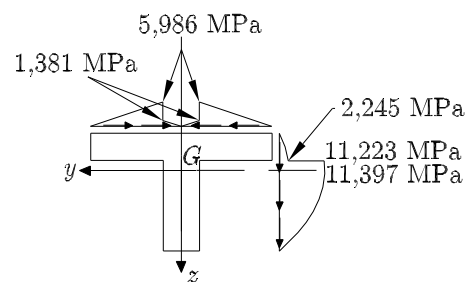
2. La expresión analítica de la distribución de tensiones tangenciales

Utilizando como unidades de fuerza N y de longitud mm

$$\tau_{xz}(z) = \begin{cases} 11,397122 - 0,0014388z^2 & (e_{ala} - z_G \leq z \leq h - z_G) \\ 2,41871 - 0,0014388z^2 & (-z_G \leq z \leq e_{ala} - z_G) \end{cases}$$

$$\tau_{xy}(y) = \begin{cases} -7,482 + 0,07482y & \left(\frac{e_{alma}}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}\right) \\ -0,06906y & \left(0 \leq y \leq \frac{e_{alma}}{2}\right) \\ 0,06906y & \left(\frac{e_{alma}}{2} \leq y \leq 0\right) \\ 7,482 - 0,07482y & \left(-\frac{b}{2} \leq y \leq -\frac{e_{alma}}{2}\right) \end{cases}$$

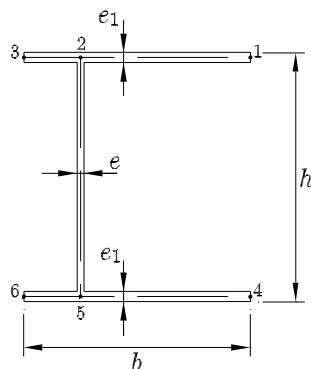
3. La representación gráfica de la distribución de tensiones tangenciales



**Figura 10.14** Sección llena en T sometida a esfuerzo cortante. Distribución de tensiones tangenciales

### Ejercicio 10.2

La sección transversal que se muestra en la Figura 10.15 está sometida a un esfuerzo cortante  $V_z$ .



**Figura 10.15** Sección de pared delgada en doble T asimétrica sometida a esfuerzo cortante

Obtener:

1. Las propiedades estáticas de la sección: área  $S$  e inercias principales  $I_{y_G}, I_{z_G}$
2. La expresión analítica de la distribución de tensiones tangenciales
3. La representación gráfica de la distribución de tensiones tangenciales

**Datos:**

$$h = 220 \text{ mm} , b_1 = 50 \text{ mm} , b_2 = 150 \text{ mm} , e_1 = 9 \text{ mm} , e_2 = 6 \text{ mm}$$

$$V_z = 350 \text{ kN}$$

**Solución:**

1. Las propiedades estáticas de la sección: área  $S$  e inercias principales  $I_{y_G}, I_{z_G}$

$$S = 4812 \cdot 10^2 \text{ mm}^2$$

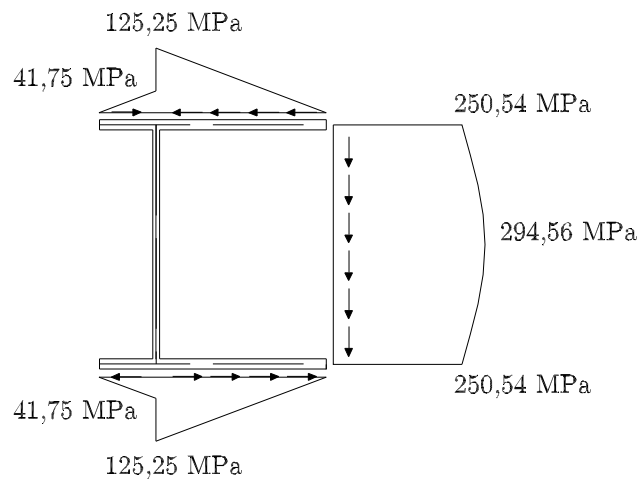
$$I_{y_G} = 442,144 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

$$I_{z_G} = 142,705 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

2. La expresión analítica de la distribución de tensiones tangenciales

$$\tau_{xs}(s) = \begin{cases} 0,835s_1 & \text{(Ala superior - lado derecho)} \\ 0,835s_3 & \text{(Ala superior - lado izquierdo)} \\ 250,540 + 0,835s_2 - 0,00396s_2^2 & \text{(Alma)} \\ -0,835s_4 & \text{(Ala inferior -lado derecho)} \\ -0,835s_6 & \text{(Ala inferior -lado izquierdo)} \end{cases}$$

3. La representación gráfica de la distribución de tensiones tangenciales



**Figura 10.16** Sección de pared delgada en doble T asimétrica sometida a esfuerzo cortante. Distribución de tensiones tangenciales debidas a un cortante según  $z$

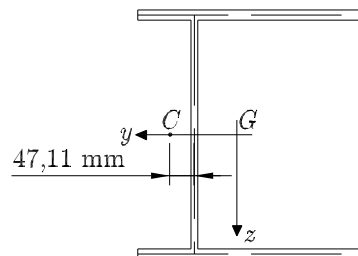
### Ejercicio 10.3

Para la sección que se muestra en la Figura 10.15, determinar:

1. El centro de esfuerzos cortantes

### Solución:

1. Obtener el centro de esfuerzos cortantes



**Figura 10.17** Sección de pared delgada en doble T asimétrica sometida a esfuerzo cortante. Centro de esfuerzos cortantes