

Lección 4

Leyes de comportamiento

Contenidos

4.1. Ley general de comportamiento elástico-lineal	50
4.2. Relaciones experimentales entre tensiones y deformaciones	51
4.2.1. El ensayo de tracción (compresión)	52
4.2.2. Propiedades elásticas de los materiales	54
4.2.3. Modelos de comportamiento de los materiales	55
4.2.4. Otros conceptos fundamentales	55
4.3. Ley de Hooke generalizada para materiales homogéneos e isótropos	56
4.4. Ecuaciones de Lamé	59
4.5. Ejercicios propuestos	60

4.1 Ley general de comportamiento elástico-lineal

Al actuar sobre un sólido una sollicitación exterior, las deformaciones que se originan y las tensiones asociadas dependerán de las fuerzas de atracción molecular, es decir, de la estructura cristalina de la materia que constituye el sólido. El caso más general de material es aquél que presenta un comportamiento diferente según la dirección de aplicación de las sollicitaciones. Estos materiales se denominan *anisótropos*. La relación entre tensiones y deformaciones se puede expresar en forma matricial compacta como

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.1)$$

y en forma matricial expandida como

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

estableciéndose la relación, en forma general, a través de 36 constantes elásticas (c_{ij}). Pero al ser la matriz \mathbf{C} simétrica, el número de constantes se reduce a 21.

Es más habitual utilizar la relación inversa de la expresión (4.2) (teniendo en cuenta la simetría de \mathbf{C})

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} \\ b_{14} & b_{24} & b_{34} & b_{44} & b_{45} & b_{46} \\ b_{15} & b_{25} & b_{35} & b_{45} & b_{55} & b_{56} \\ b_{16} & b_{26} & b_{36} & b_{46} & b_{56} & b_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Desarrollando (4.3) la relación entre deformaciones y tensiones es

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= b_{11}\sigma_x + b_{12}\sigma_y + b_{13}\sigma_z + b_{14}\tau_{xy} + b_{15}\tau_{xz} + b_{16}\tau_{yz} \\ \varepsilon_y &= b_{12}\sigma_x + b_{22}\sigma_y + b_{23}\sigma_z + b_{24}\tau_{xy} + b_{25}\tau_{xz} + b_{26}\tau_{yz} \\ \varepsilon_z &= b_{13}\sigma_x + b_{23}\sigma_y + b_{33}\sigma_z + b_{34}\tau_{xy} + b_{35}\tau_{xz} + b_{36}\tau_{yz} \\ \gamma_{xy} &= b_{14}\sigma_x + b_{24}\sigma_y + b_{34}\sigma_z + b_{44}\tau_{xy} + b_{45}\tau_{xz} + b_{46}\tau_{yz} \\ \gamma_{xz} &= b_{15}\sigma_x + b_{25}\sigma_y + b_{35}\sigma_z + b_{45}\tau_{xy} + b_{55}\tau_{xz} + b_{56}\tau_{yz} \\ \gamma_{yz} &= b_{16}\sigma_x + b_{26}\sigma_y + b_{36}\sigma_z + b_{46}\tau_{xy} + b_{56}\tau_{xz} + b_{66}\tau_{yz} \end{aligned} \quad (4.4)$$

En la expresión (4.4) se puede observar el acoplamiento entre los efectos normales y tangenciales.

Los materiales *ortótropos* son aquéllos que presentan propiedades diferentes en direcciones perpendiculares entre sí. Si se toman como ejes de referencia tales direcciones y se expresa (4.3) en dicho sistema, la relación entre deformaciones y tensiones se establece a través de 9 constantes elásticas dadas por la ecuación (4.5).

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & b_4 & b_5 & 0 & 0 & 0 \\ b_3 & b_5 & b_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Desarrollando (4.5), la relación entre deformaciones y tensiones es

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= b_1\sigma_x + b_2\sigma_y + b_3\sigma_z \\ \varepsilon_y &= b_2\sigma_x + b_4\sigma_y + b_5\sigma_z \\ \varepsilon_z &= b_3\sigma_x + b_5\sigma_y + b_6\sigma_z \\ \gamma_{xy} &= b_7\tau_{xy} \\ \gamma_{xz} &= b_8\tau_{xz} \\ \gamma_{yz} &= b_9\tau_{yz} \end{aligned} \quad (4.6)$$

En (4.6) se comprueba el desacoplamiento entre efectos normales y tangenciales.

Finalmente, los materiales *isótropos* son aquéllos que presentan las mismas propiedades en cualquier dirección. Quedan caracterizados por 2 constantes elásticas. La expresión (4.2) queda como sigue

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & -b_2 & -b_2 & 0 & 0 & 0 \\ -b_2 & b_1 & -b_2 & 0 & 0 & 0 \\ -b_2 & -b_2 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Desarrollando (4.7) se obtiene

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= b_1\sigma_x - b_2\sigma_y - b_2\sigma_z \\ \varepsilon_y &= -b_2\sigma_x + b_1\sigma_y - b_2\sigma_z \\ \varepsilon_z &= -b_2\sigma_x - b_2\sigma_y + b_1\sigma_z \\ \gamma_{xy} &= b_3\tau_{xy} \\ \gamma_{xz} &= b_3\tau_{xz} \\ \gamma_{yz} &= b_3\tau_{yz} \end{aligned} \quad (4.8)$$

En (4.8) se comprueba que también hay desacoplamiento entre los efectos normales y tangenciales en materiales isótropos.

4.2 Relaciones experimentales entre tensiones y deformaciones

En el apartado anterior se expuso que la relación entre deformaciones y tensiones depende de la estructura cristalina de la materia que constituye el sólido. Esto implica que para cada material hay una relación tensión-deformación distinta, cuya determinación se realiza experimentalmente en el laboratorio.

4.2.1 El ensayo de tracción (compresión)

El ensayo de tracción (compresión) es universalmente utilizado para determinar las propiedades mecánicas de los materiales. Se realiza sobre piezas de dimensiones normalizadas, llamadas probetas, a las que se somete a un esfuerzo de tracción (compresión) que aumenta gradualmente hasta la rotura.

Sea una probeta cuya sección transversal tiene área S , a la que se le aplica en sus extremos una fuerza F en dirección axial, como se muestra en la Figura 4.1. Esta fuerza causa en el interior del material un estado de tensiones que se supondrá uniforme.

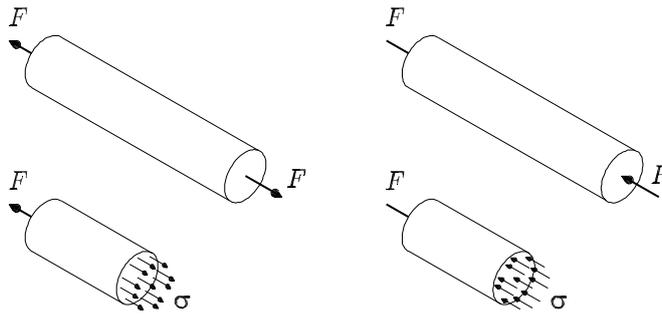


Figura 4.1 Ensayo de tracción (compresión). Piezas sometidas a tracción (compresión) y distribución de tensiones uniforme en la sección transversal

A partir de la definición de tensión, se establece la relación entre la tensión en cualquier punto de una sección transversal S de la probeta y la fuerza F mediante la ecuación (4.9).

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (4.9)$$

La probeta, debido al esfuerzo, experimenta un alargamiento (acortamiento) unitario ε en el sentido longitudinal. Aumentando progresivamente la fuerza F , se van obteniendo distintos valores de σ y ε . Representando dichos valores en un sistema de ejes cartesianos de abscisas ε y de ordenadas σ se obtiene el diagrama tensión-deformación del material ensayado. En la Figura 4.2 se muestra el diagrama tensión-deformación para un acero dulce. En él se distinguen varios puntos importantes para comprender el comportamiento mecánico de un determinado material.

El tramo OA tiene un comportamiento elástico-lineal. Las deformaciones producidas por las tensiones desaparecen totalmente cuando cesan las tensiones. Además, hay proporcionalidad entre las tensiones aplicadas y las deformaciones unitarias producidas. Al punto A , límite superior de este tramo le corresponde una tensión σ_p que se denomina *límite de proporcionalidad*.

El tramo AB tiene un comportamiento elástico. El material se comporta de forma elástica pero no hay proporcionalidad entre las tensiones y las deformaciones producidas. La gráfica se curva desde A hasta B de forma que se va reduciendo el valor de la pendiente a medida que aumenta la carga. Al punto B , límite superior de este tramo, le corresponde una tensión σ_e que se denomina *límite de elasticidad*.

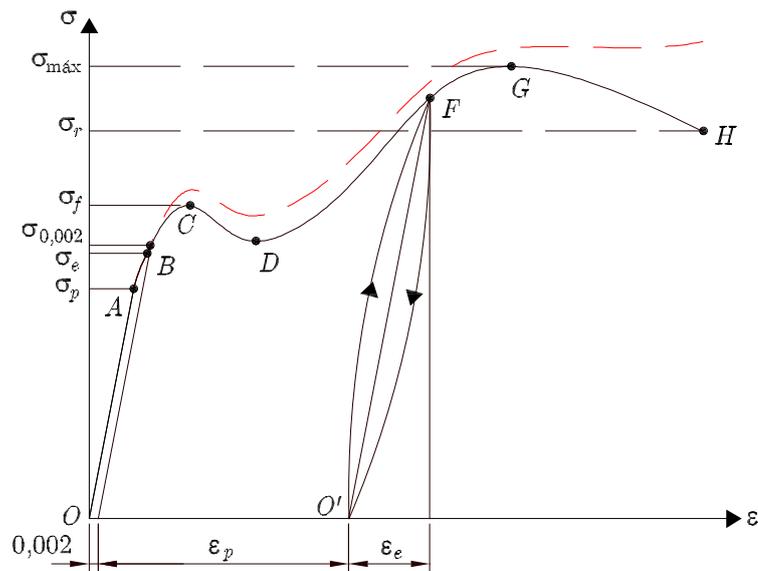


Figura 4.2 Ensayo de tracción. Diagrama tensión-deformación para un acero dulce

El tramo BC tiene un comportamiento plástico. Si se deja de aplicar la fuerza de tracción, quedan deformaciones residuales permanentes, lo que impide que el material vuelva a recuperar la configuración inicial. Al punto C , al que le corresponde una tensión σ_f , se le denomina *límite de fluencia*. Hasta el punto C los alargamientos son pequeños pero al llegar a él aumentan considerablemente sin necesidad de aumentar la fuerza F . Para cierto tipo de materiales la tensión disminuye hasta un valor determinado por el punto D , que se denomina *límite inferior de fluencia* (en este caso a C se le denomina *límite superior de fluencia*).

Los tres valores de la tensión definidos anteriormente son difíciles de distinguir en el ensayo de tracción. Por ello se suele adoptar como límite elástico aquel valor de la tensión que, al descargar la pieza, provoca una deformación unitaria residual de 0,002 (2 por mil). Al seguir aumentando la fuerza sobre la probeta, la curva sigue aumentando hasta su valor máximo en el punto G , al que le corresponde una tensión $\sigma_{máx}$ que se denomina *resistencia a la tracción* o *tensión de rotura*. El tramo DG se denomina de endurecimiento por deformación¹. Este es un tramo en el que es necesario aumentar la tensión para que aumente la deformación. El comportamiento es no lineal, con valores decrecientes de la pendiente de la curva tensión-deformación. La rotura se produce unos instantes después, en el punto H . En el tramo GH se observa que se reduce la tensión y el material sufre una gran deformación. Esto es debido al fenómeno conocido como estricción, que consiste en una gran deformación en una parte pequeña de la probeta, Figura 4.3, reduciéndose rápidamente el área

¹Si en un punto del proceso de carga entre los puntos D y G , el F por ejemplo, se reduce hasta cero la fuerza aplicada, se observa que la descarga de la probeta se produce de acuerdo con una línea FO' sensiblemente paralela a la línea de carga inicial OA , quedando una deformación plástica residual ϵ_p . Si se carga de nuevo la probeta, el comportamiento del material hasta el punto F es elástico-lineal. Es decir, similar al tramo OA inicial pero con un límite elástico superior. A un material que ha sufrido este proceso se le denomina estirado en frío. Esta es una forma de cambiar las propiedades mecánicas del material, en este caso aumentar el límite elástico. Sin embargo, la resistencia a la tracción no cambia, por lo que los materiales que han sufrido este proceso llegarán a la rotura con una menor deformación plástica.

de la sección transversal. Al reducirse el área de la sección transversal, la tensión aumenta sin necesidad de aumentar la fuerza axial. La deformación plástica (que se reparte en un principio a lo largo de toda la probeta) se concentra en una pequeña zona, y la probeta se rompe².



Figura 4.3 Ensayo de tracción. Probeta antes y después de la rotura

4.2.2 Propiedades elásticas de los materiales

A partir de los resultados del ensayo de tracción se obtienen dos propiedades que intervienen en el comportamiento elástico-lineal de los materiales³: el *módulo de elasticidad longitudinal* o *módulo de Young* (E) y el *coeficiente de Poisson* (ν).

El módulo de elasticidad longitudinal es la pendiente de la curva tensión-deformación en el tramo elástico-lineal OA . Puesto que el tramo (OA) es un tramo lineal, la relación tensión-deformación, en la dirección axial de la probeta, puede ponerse en la forma

$$\sigma = E\varepsilon \quad (4.10)$$

Esta expresión constituye la ley de Hooke. El módulo de elasticidad se define como *la tensión necesaria para producir una deformación longitudinal unitaria*. Cuanto mayor sea el módulo de elasticidad de un material menores serán las deformaciones que experimente para unas tensiones dadas. El módulo de elasticidad es diferente para cada material y se expresa en las mismas unidades que la tensión.

El coeficiente de Poisson es la relación entre la contracción transversal unitaria y el alargamiento longitudinal unitario de la probeta:

$$\nu = \frac{\text{contracción transversal unitaria}}{\text{alargamiento longitudinal unitario}} \quad (4.11)$$

²Para definir la curva tensión-deformación (línea continua), la tensión ha sido determinada dividiendo la fuerza F por el área inicial de la probeta. Sin embargo, el área inicial de la probeta va disminuyendo progresivamente, con lo cual la tensión obtenida por la ecuación (4.9) no es real (en realidad es menor que la real). En la Figura 4.2 se ha dibujado, con línea de trazos, la curva real. Se observa que la probeta rompe a una tensión mayor que la dada por el punto G . No obstante, debido a la dificultad de obtener la gráfica tensión-deformación real, es habitual utilizar la gráfica de línea continua mostrada en dicha figura, lo cual está del lado de la seguridad.

³En el Código Técnico de la Edificación se dan los valores de las propiedades mecánicas de los materiales más utilizados en Arquitectura. En el Documento Básico SE-A: Seguridad Estructural-Acero, en su apartado 4 se especifican los valores de las propiedades mecánicas de los aceros. En el Documento Básico SE-F: Seguridad Estructural-Fábrica, en sus apartado 4 y anejo C, se especifican los valores de las propiedades mecánicas de las construcciones de fábrica. En el Documento Básico SE-M: Seguridad estructural-Madera, en sus apartado 4 y anejos D y E se especifican los valores de las propiedades mecánicas de la madera. Las propiedades mecánicas del hormigón se dan en la EHE.

Así, en la dirección perpendicular a la de actuación de la tensión normal σ , aparece una deformación transversal de valor

$$\varepsilon_t = -\nu\varepsilon = -\nu\frac{\sigma}{E} \quad (4.12)$$

El coeficiente de Poisson ν , tal como se ha definido, adopta siempre valores positivos. En un material isótropo, su valor es independiente de la dirección de la deformación transversal que se considere. El valor máximo del coeficiente de Poisson es 0,5⁴.

La relación entre tensiones y deformaciones para materiales isótropos, ecuación (4.10), en función de las propiedades elásticas del material, es

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \end{aligned} \quad (4.13)$$

siendo G el módulo de elasticidad transversal $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

4.2.3 Modelos de comportamiento de los materiales

La relación tensión-deformación de los materiales en la zona de comportamiento no lineal suele ser excesivamente complicada para utilizarla en el desarrollo de las diversas teorías que tienen en cuenta el comportamiento no lineal (plasticidad, viscoelasticidad, etc). Por ello, se han elaborado diferentes modelos de comportamiento de materiales. Algunos de estos modelos se muestran en la Figura 4.4.

4.2.4 Otros conceptos fundamentales

La ductilidad es una medida del grado de deformación plástica que un material puede soportar hasta la fractura. Un material que experimenta poca o ninguna deformación plástica antes de la rotura se dice que tiene un *comportamiento frágil*. Cuando el material llega a la rotura con una deformación plástica importante se dice que tiene una *rotura dúctil*. Se habla de rotura dúctil (o frágil) y no de materiales dúctiles (o frágiles) porque el comportamiento dúctil o frágil no depende exclusivamente del

⁴En en el tema 2, apartado 2.2.2, se obtuvo que que la dilatación cúbica unitaria de un sólido es $e = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$. Sustituyendo la ecuación (4.12) en la expresión de la dilatación cúbica, se obtiene $e = \varepsilon - \nu\varepsilon - \nu\varepsilon = (1 - 2\nu)\varepsilon$. Esta expresión se anula para $\nu = 0,5$, y como la dilatación cúbica unitaria en una pieza sometida a tracción no puede ser negativa, ν tiene que ser inferior a 0,5. El valor $\nu = 0$ corresponde a materiales rígidos transversalmente (no se deforman transversalmente al aplicar una fuerza longitudinal), mientras que el valor $\nu = 0,5$ corresponde al material más flexible transversalmente, que sería aquel que no experimenta cambio de volumen al aplicar una fuerza unidimensional.

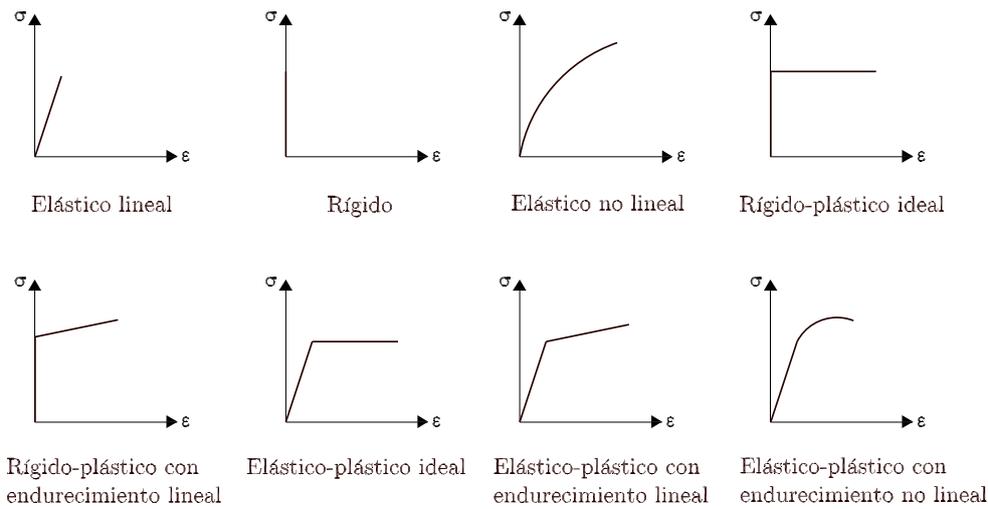


Figura 4.4 Modelos de comportamiento

material, sino que influyen otras componentes, tales como la temperatura, los estados triples de tensiones, etc.

En los materiales metálicos hay otros conceptos habituales como *resiliencia* y *tenacidad*. Se entiende por resiliencia a la capacidad de un material de absorber energía elástica cuando se deforma, y de ceder esta energía cuando se deja de aplicar la acción que causa la deformación. Por *tenacidad* se entiende la capacidad de un material de absorber energía antes de la fractura.

4.3 Ley de Hooke generalizada para materiales homogéneos e isótropos

Sea una barra de sección transversal rectangular sometida en sus caras a fuerzas longitudinales de tracción de valor F que se suponen repartidas uniformemente en la sección. Se consideran los ejes de referencia como principales, tal como se muestra en la Figura 4.5.

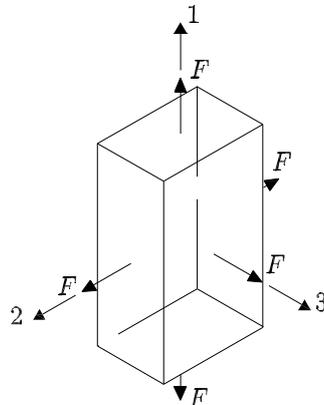


Figura 4.5 Prisma sometido a tracción triaxial según ejes principales

Considerando exclusivamente la fuerza en la dirección **1**, el estado tensional en el sólido es

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{F}{S_1} \\ \sigma_2 &= \sigma_3 = 0 \\ \tau_{12} &= \tau_{13} = \tau_{23} = 0\end{aligned}\quad (4.14)$$

siendo S_1 el área de la sección normal al eje **1**. Para este estado tensional, las deformaciones, Figura 4.6 a), que se producen en el sólido son

$$\varepsilon_1 = \frac{A'D' - AD}{AD} \quad (4.15)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{B'C' - BC}{BC} \quad (4.16)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{A'B' - AB}{AB} \quad (4.17)$$

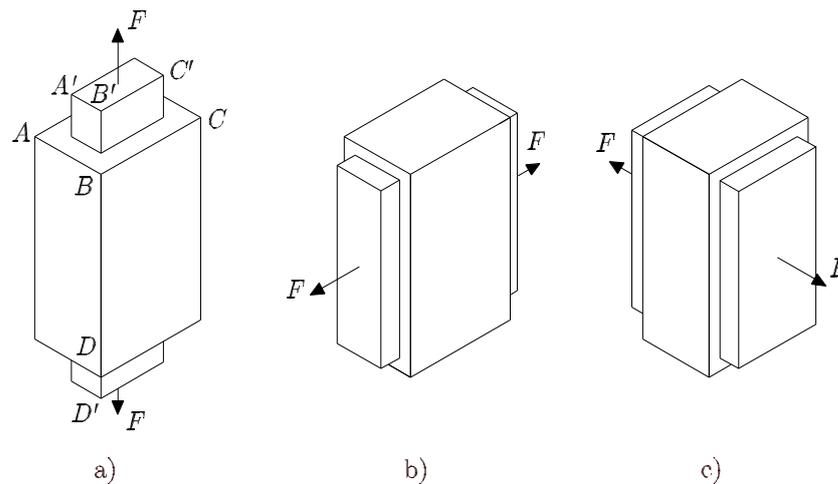


Figura 4.6 Prisma sometido a tracción triaxial según ejes principales

Los subíndices 1, 2 y 3 indican las deformaciones en las direcciones principales. La ecuación (4.15) proporciona el alargamiento unitario en dirección principal **1**, mientras que las expresiones (4.16) y (4.17) proporcionan la contracción transversal unitaria según las direcciones principales **2** y **3**, respectivamente.

Teniendo en cuenta el tipo de sollicitación, la simetría de la pieza y las hipótesis de isotropía y homogeneidad del material, se puede afirmar que no existe deformación tangencial o deslizamiento, es decir

$$\gamma_{12} = \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{12} = \tau_{13} = \tau_{23} = 0 \quad (4.18)$$

Al considerar un comportamiento elástico del material es posible aplicar la ley de Hooke:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E} \\
\varepsilon_2 &= -\nu\varepsilon_1 = -\nu\frac{\sigma_1}{E} \\
\varepsilon_3 &= -\nu\varepsilon_1 = -\nu\frac{\sigma_1}{E}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Si se consideran los efectos de las fuerzas en las direcciones 2 y 3, Figura 4.6 b) y Figura 4.6 c), se llega a expresiones similares a las anteriores, tal y como se muestra en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1 Componentes de la deformación según la fuerza aplicada

Eje	Deformaciones producidas por		
	F (en dirección 1)	F (en dirección 2)	F (en dirección 3)
1	$\frac{\sigma_1}{E}$	$-\nu\frac{\sigma_2}{E}$	$-\nu\frac{\sigma_3}{E}$
2	$-\nu\frac{\sigma_1}{E}$	$\frac{\sigma_2}{E}$	$-\nu\frac{\sigma_3}{E}$
3	$-\nu\frac{\sigma_1}{E}$	$-\nu\frac{\sigma_2}{E}$	$\frac{\sigma_3}{E}$

Al ser lineales las ecuaciones, se pueden superponer los efectos para determinar las deformaciones unitarias totales:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\
\varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_3) = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)] \\
\varepsilon_3 &= \frac{\sigma_3}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Estas ecuaciones constituyen la ley de Hooke generalizada en las direcciones principales.

En un sistema de referencia no principal, la ley de Hooke toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\
\varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\
\varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \\
\gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\
\gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} \\
\gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Las expresiones anteriores constituyen la *Ley de Hooke generalizada para materiales homogéneos e isotrópicos en ejes cualesquiera*, y coinciden con las expresadas en la ecuación (4.13).

4.4 Ecuaciones de Lamé

Si las ecuaciones de (4.21), correspondientes a las tensiones normales, se expresan en forma matricial, se obtiene

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

Expresando las tensiones en función de las deformaciones, invirtiendo la matriz de constantes elásticas, se obtiene

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

Las tensiones tangenciales se pueden expresar en función de las deformaciones tangenciales, ecuación (4.21), como sigue

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} \\ \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Haciendo $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, y conociéndose que $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, las ecuaciones (4.23) y (4.24) se pueden expresar como

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda e + 2G\varepsilon_x \\ \sigma_y &= \lambda e + 2G\varepsilon_y \\ \sigma_z &= \lambda e + 2G\varepsilon_z \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} \\ \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \end{aligned} \quad (4.25)$$

siendo $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$. Las ecuaciones (4.25) constituyen las llamadas *ecuaciones de Lamé*, y expresan las tensiones en función de las deformaciones.

En caso de tensión plana, las ecuaciones de Lamé se simplifican. Si se trabaja en el plano xy , las ecuaciones son

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\nu\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \end{aligned} \quad (4.26)$$

4.5 Ejercicios propuestos

Ejercicio 4.1

El campo de desplazamientos de los puntos de un sólido elástico viene definido por las funciones:

$$u = x^2 \cdot 10^{-4} \quad , \quad v = (y^2 + 2x) \cdot 10^{-4} \quad , \quad w = z^2 \cdot 10^{-4} \quad (x, y \text{ y } z \text{ se expresan en mm})$$

Determinar, para el punto $P(1, 0, 2)$, cuyas coordenadas están expresadas en mm:

1. El tensor de pequeñas deformaciones
2. El tensor de tensiones

Datos:

$$E = 210 \text{ GPa} \quad , \quad \nu = 0,3$$

Solución:

1. El tensor de pequeñas deformaciones

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4}$$

2. El tensor de tensiones

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 105 & 16,154 & 0 \\ 16,154 & 72,692 & 0 \\ 0 & 0 & 137,308 \end{pmatrix} \text{ (MPa)}$$

Ejercicio 4.2

El sólido elástico de la Figura 4.7, se encuentra sometido a un estado de tensiones uniforme de componentes σ_x , σ_y y σ_z .

Determinar:

1. Lo que medirían sendas galgas colocadas en las direcciones OE y GE
2. La variación de volumen del sólido

Datos:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -3 \text{ MPa} \quad , \quad \sigma_y = 2 \text{ MPa} \quad , \quad \sigma_z = 2 \text{ MPa} \\ E &= 210 \text{ GPa} \quad , \quad \nu = 0,35 \end{aligned}$$

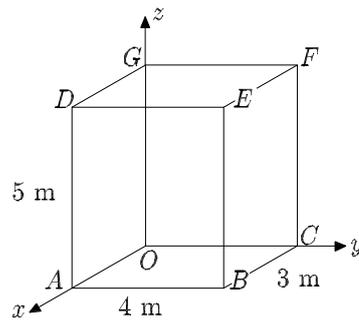


Figura 4.7 Sólido elástico sometido a un estado de tensiones uniforme

Solución:

1. Lo que medirían sendas sondas galgas colocadas en las direcciones OE y GE

$$\varepsilon_{OE} = 5,404 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_{GE} = -3,920 \cdot 10^{-7}$$

2. La variación de volumen del sólido

$$\Delta V = 0,000084 \text{ m}^3$$

Ejercicio 4.3

En una placa en la que se desconocen sus propiedades mecánicas, se han colocado dos galgas extensométricas, como se muestra en la Figura 4.8. Aplicando a la placa unas tensiones normales uniformes de tracción σ_x y σ_y , se miden unas deformaciones ε_x y ε_y .

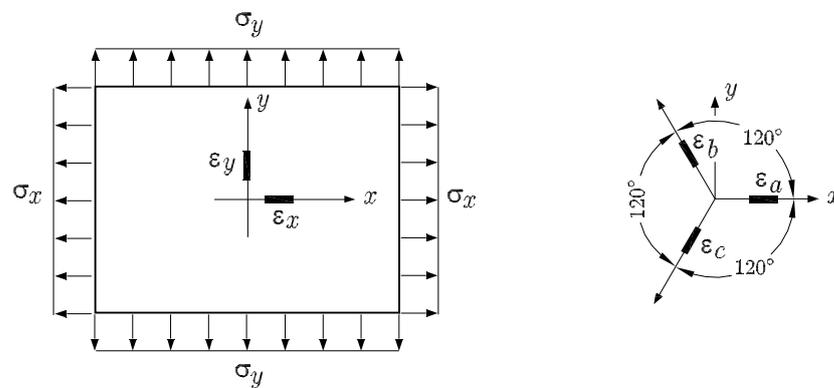


Figura 4.8 Galgas extensométricas colocadas en una placa sometida a tracción

Se pide:

1. Determinar el coeficiente de Poisson ν , y el módulo de elasticidad longitudinal E del material.
2. Si las galgas hubieran sido dispuestas en roseta como se muestra en la figura de la derecha, ¿Qué lecturas de ε_a , ε_b y ε_c habríamos tenido?

Datos:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 30 \text{ MPa} , \sigma_y = 15 \text{ MPa} \\ \varepsilon_x &= 550 \cdot 10^{-6} , \varepsilon_y = 100 \cdot 10^{-6}\end{aligned}$$

Solución:

1. Determinar el coeficiente de Poisson ν , y el módulo de elasticidad longitudinal E del material.

$$E = 45000 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0,35$$

2. Si las galgas hubieran sido dispuestas en roseta como se muestra en la figura de la derecha, ¿Qué lecturas de ε_a , ε_b y ε_c habríamos tenido?.

$$\varepsilon_a = 550 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_b = 212,5 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_c = 212,5 \cdot 10^{-6}$$