

Lección 2

Deformaciones

Contenidos

2.1. Concepto de deformación	14
2.2. Deformación en el entorno de un punto	15
2.2.1. Vector deformación. Componentes intrínsecas	19
2.2.2. Deformaciones principales y direcciones principales de de- formación	20
2.3. Deformación plana	22
2.4. Ejercicios propuestos	22

2.1 Concepto de deformación

Las partículas que constituyen cualquier sólido real, bajo la acción de cargas que actúan sobre él, varían su posición en el espacio. Por consiguiente, el sólido adopta una configuración *deformada* distinta de la inicial.

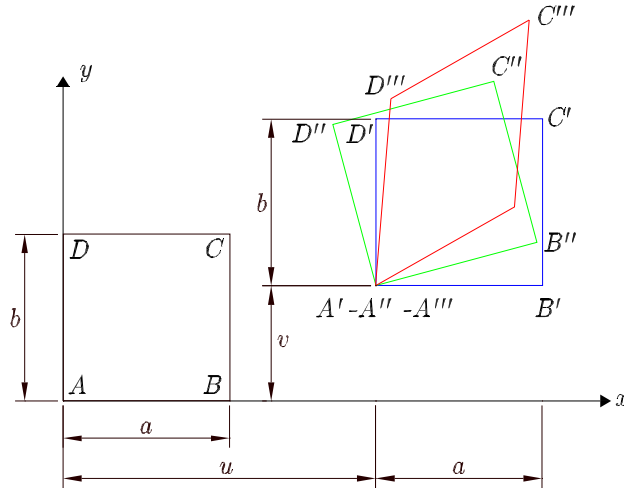


Figura 2.1 Concepto de deformación

Existe deformación en un sólido si se produce un desplazamiento relativo entre las partículas que lo constituyen. El desplazamiento de los puntos de un sólido es debido a dos componentes: una componente de movimiento como sólido rígido y otra de deformación. Así pues, el desplazamiento de los puntos de un sólido no implica necesariamente que este se deforme. El rectángulo $ABCD$ de la Figura 2.1 se desplaza hacia otra posición $A'B'C'D'$, pero es idéntico al inicial; es decir, no se ha producido ningún acercamiento o separación entre sus partículas, o lo que es lo mismo, no se ha producido ninguna deformación. Solamente se ha producido un movimiento como cuerpo rígido. Lo mismo ocurre al pasar a la posición $A''B''C''D''$ mediante una rotación como sólido rígido. Finalmente, cuando el rectángulo pasa a la posición $A'''B'''C'''D'''$, sí que se deforma.

Los dos casos más simples de deformación son el alargamiento unitario y la deformación tangencial. Un ejemplo de estos tipos de deformación se muestra en la Figura 2.2.

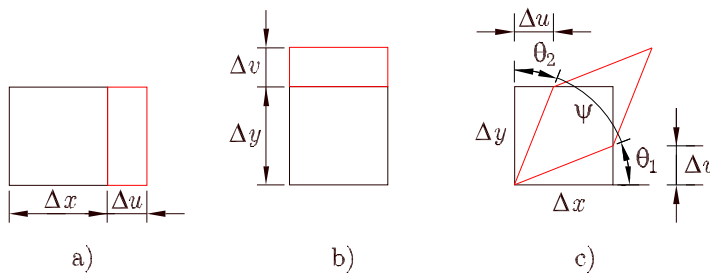


Figura 2.2 Ejemplos de deformación: a) alargamiento en la dirección x , b) alargamiento en la dirección y , y c) deformación tangencial pura sin rotación

El alargamiento unitario se define como un cambio de longitud por unidad de longitud. Se denomina ε , indicando por medio de un subíndice la dirección del alargamiento. Observando las Figuras 2.2 a) y 2.2 b), se deduce que

$$\varepsilon_x \simeq \frac{\Delta u}{\Delta x}, \quad \varepsilon_y \simeq \frac{\Delta v}{\Delta y} \quad (2.1)$$

La deformación tangencial se define como la mitad del decremento del ángulo recto que forman inicialmente dos segmentos infinitamente pequeños. En referencia a la Figura 2.2 c), la expresión de la deformación tangencial es

$$\gamma_{xy} \simeq \frac{\pi}{2} - \psi = \theta_1 + \theta_2 \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_{xy} \simeq \frac{1}{2}\gamma_{xy} \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta u}{\Delta y} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) \quad (2.3)$$

Cuando Δx y Δy tienden a cero, las expresiones (2.1) y (2.3) toman la forma

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.4)$$

donde u y v son las componentes del desplazamiento en dirección de los ejes x e y , respectivamente.

Para obtener la expresión de la deformación tangencial se han aproximado los ángulos por sus tangentes (hipótesis de pequeños desplazamientos). El factor $\frac{1}{2}$ en la deformación tangencial se debe a que las componentes de la deformación son las componentes de un tensor de segundo orden simétrico. De la expresión (2.2) se deduce que la deformación tangencial es positiva si el ángulo pasa a ser agudo.

2.2 Deformación en el entorno de un punto

En la Figura 2.3 se muestra una viga biapoyada sometida a una carga puntual en su zona central, así como la configuración deformada de la misma.

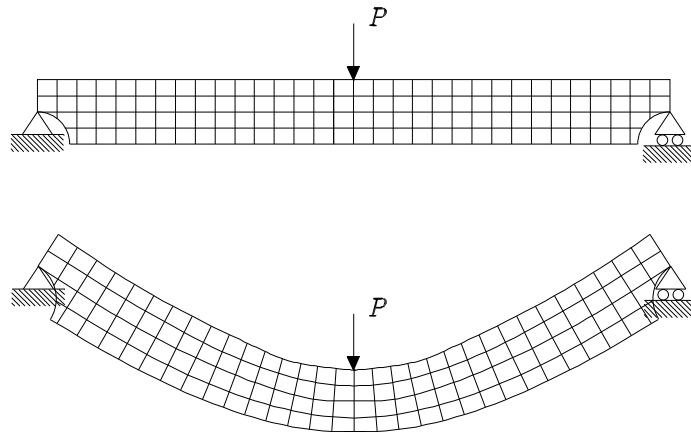


Figura 2.3 Deformación de una viga biapoyada sometida a una carga puntual

Se aprecia la distorsión que sufre la malla superpuesta sobre la viga una vez deformada. Los cuadriláteros que forman la malla sufren un alargamiento o acortamiento

de los lados que los forman y una variación de los ángulos rectos iniciales. Es decir, la posición relativa entre los puntos del sólido ha variado, por lo que la viga se ha deformado.

Para determinar la deformación producida se va a trabajar con dos puntos cualesquiera P_0 y P de la viga, muy próximos, unidos por el vector de posición \vec{r} que se muestra en la Figura 2.4 a). Al deformarse la viga, los puntos pasan, en la configuración deformada, a las posiciones P'_0 y P' que se muestran en la Figura 2.4 b). Considerando la hipótesis de *pequeños desplazamientos* se admite que las configuraciones deformada e indeformada prácticamente coinciden.

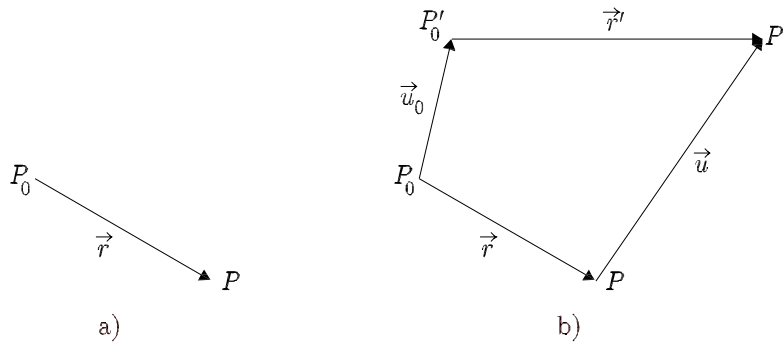


Figura 2.4 Deformación en el entorno de un punto: a) configuración inicial $P_0 - P$ y b) configuración final $P'_0 - P'$

Denominamos vectores desplazamiento de los puntos P_0 y P a \vec{u}_0 y \vec{u} , respectivamente. Al estar muy próximos ambos puntos, es posible obtener el valor de \vec{u} utilizando el desarrollo en serie de Taylor en el entorno del punto P_0 como sigue,

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \frac{\partial u}{\partial x} r_x + \frac{\partial u}{\partial y} r_y + \frac{\partial u}{\partial z} r_z \\ v &= v_0 + \frac{\partial v}{\partial x} r_x + \frac{\partial v}{\partial y} r_y + \frac{\partial v}{\partial z} r_z \\ w &= w_0 + \frac{\partial w}{\partial x} r_x + \frac{\partial w}{\partial y} r_y + \frac{\partial w}{\partial z} r_z \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde u , v y w son las componentes del desplazamiento en la dirección de los ejes x , y y z , respectivamente.

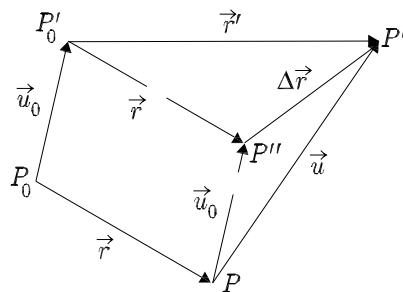


Figura 2.5 Variación del vector r

Los términos del desarrollo de grado mayor a uno se han despreciado debido a la

hipótesis de *pequeñas deformaciones*. La variación del vector \vec{r}' que se muestra en la Figura 2.5 será:

$$\Delta \vec{r}' = \vec{r}' - \vec{r} = \vec{u} - \vec{u}_0 \quad (2.6)$$

Sustituyendo las expresiones (2.5) en (2.6) y desarrollando esta última, se obtiene:

$$\begin{aligned} \Delta r_x &= \frac{\partial u}{\partial x} r_x + \frac{\partial u}{\partial y} r_y + \frac{\partial u}{\partial z} r_z \\ \Delta r_y &= \frac{\partial v}{\partial x} r_x + \frac{\partial v}{\partial y} r_y + \frac{\partial v}{\partial z} r_z \\ \Delta r_z &= \frac{\partial w}{\partial x} r_x + \frac{\partial w}{\partial y} r_y + \frac{\partial w}{\partial z} r_z \end{aligned} \quad (2.7)$$

Expresando (2.7) en forma matricial se tiene

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \Delta r_x \\ \Delta r_y \\ \Delta r_z \end{pmatrix}}_{\Delta \mathbf{r}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}}_{\mathbf{J}} \underbrace{\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}}_{\mathbf{r}} \quad (2.8)$$

Donde la “matriz” \mathbf{J} se denomina *tensor gradiente de desplazamientos*. Dicho tensor se puede descomponer en un tensor simétrico y otro antisimétrico como sigue

$$\mathbf{J} = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega}, \quad (2.9)$$

siendo $\boldsymbol{\varepsilon}$ es el tensor de pequeñas deformaciones, que desarrollando sus componentes se tiene

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

y $\boldsymbol{\omega}$ es el tensor de rotación, que desarrollado tiene de componentes

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{xy} & \omega_{xz} \\ -\omega_{xy} & 0 & \omega_{yz} \\ -\omega_{xz} & -\omega_{yz} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

La expresión (2.8) se puede expresar, en forma matricial, teniendo en cuenta (2.9) como

$$\Delta \mathbf{r} = (\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0 \quad (2.12)$$

que coincide con la expresión (2.6), esta expresada en forma vectorial.

La ecuación anterior implica que la variación relativa de la distancia entre dos puntos infinitamente próximos de un sólido elástico se puede expresar sumando a \vec{u} una componente de deformación y otra componente de giro. En forma matricial, puede expresarse como

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \mathbf{r} \quad (2.13)$$

En la Figura 2.6 a) los puntos P_0 y P (vector \vec{r}) han sufrido una traslación como sólido rígido hasta las posiciones P'_0 y P'' respectivamente, definida por el vector \vec{u}_0 . En la Figura 2.6 b) se produce una rotación como sólido rígido del segmento P'_0P'' alrededor del punto P'_0 , de valor $\boldsymbol{\omega}^r$ ($\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}$) (por la hipótesis de *pequeños desplazamientos* se aproxima el arco a la tangente).

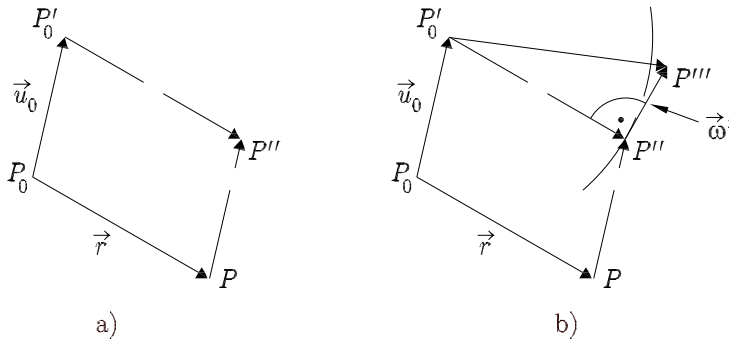


Figura 2.6 Deformación en el entorno de un punto: a) traslación y b) giro

Finalmente, para pasar a la posición P' se produce una deformación del vector \vec{r} de valor $\boldsymbol{\varepsilon}^r$ ($\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{r}$). En la Figura 2.7 se muestra la descomposición completa de la deformación en el entorno de un punto.

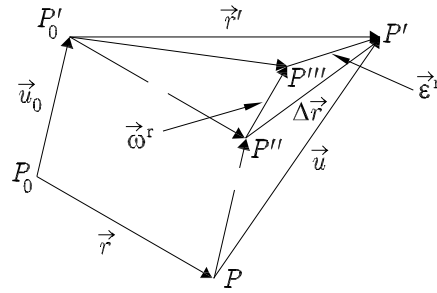


Figura 2.7 Deformación en el entorno de un punto: descomposición

2.2.1 Vector deformación. Componentes intrínsecas

En todo punto de un sólido donde esté definido el tensor de pequeñas deformaciones, para cada dirección \vec{r} hay asociado un vector deformación $\vec{\epsilon}^r$ que se calcula mediante la expresión matricial

$$\epsilon^r = \epsilon \mathbf{r} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_y & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Si se utiliza el vector unitario de \vec{r} , denominado \vec{n} , se obtiene el vector deformación unitaria ϵ^n

$$\epsilon^n = \epsilon \mathbf{n} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_y & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

siendo (l, m, n) los cosenos directores (las componentes) del vector \vec{n} .

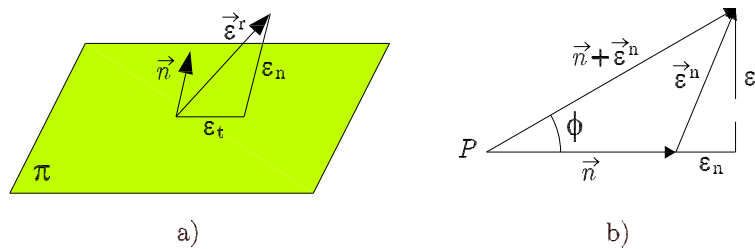


Figura 2.8 Componentes intrínsecas del vector deformación

La componente intrínseca normal, la deformación normal, es la proyección del vector deformación $\vec{\epsilon}^r$ sobre \vec{n} . Se obtiene mediante las expresiones

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \vec{\epsilon}^r \cdot \vec{n} && \text{(Vectorialmente)} \\ \epsilon_r &= \mathbf{n}^T \epsilon^r = \mathbf{n}^T \epsilon \mathbf{r} && \text{(Matricialmente)} \end{aligned} \quad (2.16)$$

La Figura 2.8 a) muestra gráficamente esta proyección. La deformación longitudinal unitaria se calcula mediante la expresión

$$\begin{aligned} \epsilon_n &= \vec{\epsilon}^n \cdot \vec{n} && \text{(Vectorialmente)} \\ \epsilon_n &= \mathbf{n}^T \epsilon^n = \mathbf{n}^T \epsilon \mathbf{n} && \text{(Matricialmente)} \end{aligned} \quad (2.17)$$

La componente intrínseca tangencial (la deformación tangencial o transversal) ε_t se define como la proyección del vector deformación sobre el plano definido por \vec{n} , tal como se muestra en la Figura 2.8 a). Se calcula mediante las expresiones

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= \vec{\varepsilon}^t \cdot \vec{t} && \text{(Vectorialmente)} \\ \varepsilon_t &= \mathbf{t}^T \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{r} = \mathbf{t}^T \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{r} && \text{(Matricialmente)}\end{aligned}\quad (2.18)$$

La componente intrínseca tangencial del vector deformación tangencial unitaria se calcula mediante las expresiones

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= \vec{\varepsilon}^n \cdot \vec{t} && \text{(Vectorialmente)} \\ \varepsilon_t &= \mathbf{t}^T \boldsymbol{\varepsilon}^t = \mathbf{t}^T \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{n} && \text{(Matricialmente)}\end{aligned}\quad (2.19)$$

siendo \vec{t} el vector tangente al plano y perpendicular a \vec{n} . La deformación tangencial también puede obtenerse vectorialmente, como

$$|\varepsilon_t| = |\vec{\varepsilon}^t - \varepsilon_r \vec{n}| \quad (2.20)$$

o en el caso del vector deformación unitaria como

$$|\varepsilon_t| = |\vec{\varepsilon}^n - \varepsilon_n \vec{n}| \quad (2.21)$$

La deformación angular ϕ , que se representa en la Figura 2.8 b), coincide con la deformación tangencial unitaria ε_t expresada en radianes.

2.2.2 Deformaciones principales y direcciones principales de deformación

Al ser el tensor de pequeñas deformaciones simétrico, se puede afirmar que existirán en cada punto del sólido elástico tres direcciones perpendiculares entre sí, correspondientes a sendos planos, en los que no hay distorsión o deformación angular. Es decir, en forma matricial, se verifica

$$\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{n} = \varepsilon \mathbf{n} = \varepsilon \mathbf{I} \mathbf{n} \quad (2.22)$$

que se puede expresar como

$$[\boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon \mathbf{I}] \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (2.23)$$

siendo $\boldsymbol{\varepsilon}$ el tensor de pequeñas deformaciones, \mathbf{I} la matriz identidad y ε el módulo de la deformación longitudinal. Por tanto,

$$\varepsilon \mathbf{I} = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Expresando la ecuación (2.23) en forma paramétrica se tiene

$$\begin{cases} (\varepsilon_x - \varepsilon) l + \varepsilon_{xy} m + \varepsilon_{xz} n = 0 \\ \varepsilon_{xy} l + (\varepsilon_y - \varepsilon) m + \varepsilon_{yz} n = 0 \\ \varepsilon_{xz} l + \varepsilon_{yz} m + (\varepsilon_z - \varepsilon) n = 0 \end{cases} \quad (2.25)$$

que es un sistema de tres ecuaciones algebraicas homogéneas lineales. Las componentes del vector unitario \vec{n} son las incógnitas, debiendo estas satisfacer por el carácter unitario del vector normal, la siguiente expresión

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (2.26)$$

siendo (l, m, n) los cosenos directores del vector \vec{n} . Dichos cosenos directores no pueden ser todos cero, ya que deben satisfacer la ecuación (2.26). Para que un sistema de ecuaciones homogéneas lineales tenga una solución distinta a la trivial, es condición necesaria y suficiente que el determinante de la matriz de coeficientes sea igual a cero, es decir

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{vmatrix} = 0. \quad (2.27)$$

Al desarrollar este determinante se obtiene una ecuación cúbica, a la que denominamos *ecuación característica*,

$$-\varepsilon^3 + I_1\varepsilon^2 - I_2\varepsilon + I_3 = 0 \quad (2.28)$$

siendo

$$I_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (2.29)$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y \end{vmatrix} \quad (2.30)$$

$$I_3 = |\boldsymbol{\varepsilon}| = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} \quad (2.31)$$

Las raíces ε_i , siendo $i = 1, 2, 3$, de la ecuación característica (los valores propios de $\boldsymbol{\varepsilon}$) reciben el nombre de *deformaciones principales*. Las direcciones de estas deformaciones principales, es decir, los vectores propios de $\boldsymbol{\varepsilon}$, se denominan *direcciones principales de deformación*. Se convendrá que ε_1 es la raíz mayor (algebraicamente) y ε_3 la menor.

En todo punto interior de un sólido elástico existen, si el determinante del tensor de pequeñas deformaciones es distinto de cero, tres direcciones principales ortogonales entre sí, que son las direcciones principales de deformación. Los valores de las deformaciones principales son independientes del sistema de referencia adoptado, y son los valores máximos y mínimos que pueden adoptar las deformaciones en el entorno del punto considerado. Quiere esto decir que las raíces de la ecuación característica son invariantes. Esto implica que los coeficientes I_1 , I_2 e I_3 de la ecuación característica también son invariantes.

A I_1 se le denomina invariante lineal, dilatación cúbica o dilatación volumétrica. Se denota por e y representa el incremento de volumen unitario ΔV que sufre un paralelepípedo elemental de lados dx, dy, dz y de volumen $dV = dxdydz$.

$$e = \frac{\Delta V}{dV} \approx \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (2.32)$$

2.3 Deformación plana

Si se admite que los desplazamientos en un sólido elástico se producen exclusivamente en un plano, las componentes de los desplazamientos son independientes de la coordenada del eje perpendicular al plano. Se dice entonces que dicho sólido está sometido a *deformación plana*. Así, considerando como plano de deformación el xy , se cumple que

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = 0 \quad (2.33)$$

Las ecuaciones anteriores, implican que

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.34)$$

y

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.35)$$

Por tanto, el tensor de pequeñas deformaciones, para el caso de deformación plana en el plano xy , adopta la forma

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

2.4 Ejercicios propuestos

Ejercicio 2.1

El campo vectorial de desplazamientos en el entorno del punto P de un medio continuo es

$$u = 4xy \cdot 10^{-5}, \quad v = 3xy^2 \cdot 10^{-5}, \quad w = xz \cdot 10^{-5}$$

siendo las unidades en milímetros.

Se pide:

1. Calcular el tensor de pequeñas deformaciones
2. Calcular el tensor de rotación

Solución:

1. Calcular el tensor de pequeñas deformaciones:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 4y & 2x + \frac{3}{2}y^2 & \frac{z}{2} \\ 2x + \frac{3}{2}y^2 & 6xy & 0 \\ \frac{z}{2} & 0 & x \end{pmatrix} \cdot 10^{-5}$$

2. Calcular el tensor de rotación:

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 2x - \frac{3}{2}y^2 & -\frac{z}{2} \\ -2x + \frac{3}{2}y^2 & 0 & 0 \\ \frac{z}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5}$$

Ejercicio 2.2

Conociéndose el tensor de pequeñas deformaciones ε en el entorno de un punto de un sólido elástico, se pide:

1. Calcular las componentes intrínsecas de la deformación del vector \vec{r}

Datos:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 8 & 8 & -\frac{1}{2} \\ 8 & 12 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5}$$

siendo $\vec{r} = \vec{i} - \vec{k}$.

Solución:

1. Calcular las componentes intrínsecas de la deformación del vector \vec{r}

$$\varepsilon_r = \frac{10}{\sqrt{2}} \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_t = \frac{177}{\sqrt{354}} \cdot 10^{-5}$$

Ejercicio 2.3

Conociéndose el tensor de pequeñas deformaciones ε en el entorno de un punto de un sólido elástico trabajando a deformación plana, se pide:

1. Calcular las deformaciones principales
2. Calcular las direcciones principales de deformación

Datos:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 120 & -80 \\ -80 & 100 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6}$$

Solución:

1. Calcular las deformaciones principales:

$$\varepsilon_1 = (110 + 10\sqrt{65}) \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_2 = (110 - 10\sqrt{65}) \cdot 10^{-6}$$

2. Calcular las direcciones principales de deformación:

$$\mathbf{n}_1 = (\pm 0,7497 \quad \mp 0,6618)^T$$

$$\mathbf{n}_2 = (\pm 0,6618 \quad \mp 0,7497)^T$$