# Introducción a los contrastes de hipótesis.

Mathieu Kessler

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística
Universidad Politécnica de Cartagena

Cartagena, Febrero 2010

# Guión

1. Introducción
2. Estructura general de los contrastes de hipótesis
   - Primer ingrediente
   - Regla de decisión
3. Contraste de hipótesis para la media $\mu$.

## Guión

# Introducción

## El contexto

- En el tema anterior: hemos visto cómo estimar un parámetro, basándose en las observaciones de una muestra.
- En este tema, vamos a ver cómo tomar una decisión acerca del valor de este parámetro.

# Ejemplo ilustrativo inspirado en la norma EN-206-1: 2000

## La norma EN-206-1:2000

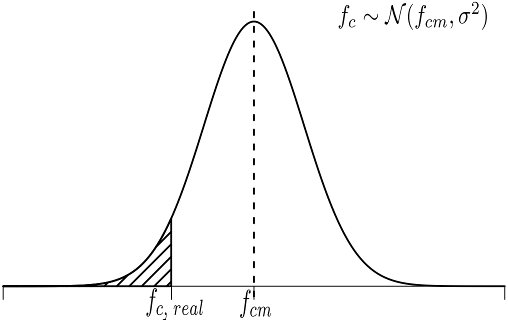
La norma Europea EN 206-1:2000 ha establecido un nuevo criterio de aceptación de hormigones mediante el uso de cuatro criterios estadísticos de conformidad:

- un criterio de aceptación para la producción inicial.
- un criterio de aceptación para la producción continua.
- un criterio de pertenencia a la población controlada.
- un criterio de familia de hormigones.

# Pequeño recordatorio sobre resistencia a compresión de hormigón

- Experimento aleatorio: escoger al azar una probeta de hormigón.
- $f_c$: la variable aleatoria: resistencia a compresión de la probeta escogida
- Se suele suponer: $f_c \sim \mathcal{N}(f_{cm}, \sigma^2)$,
  - $f_{cm}$: resistencia media poblacional (de todo el hormigón producido).
  - $\sigma$ desviación típica poblacional.
- $f_{c,real}$: resistencia característica real (Percentil 5%, $P_5$)

# Distribución de $f_c$



# Pequeño recordatorio sobre resistencia a compresión de hormigón

- Experimento aleatorio: escoger al azar una probeta de hormigón.
- $f_c$: la variable aleatoria: resistencia a compresión de la probeta escogida
- Se suele suponer: $f_c \sim \mathcal{N}(f_{cm}, \sigma^2)$,
  - $f_{cm}$: resistencia media poblacional (de todo el hormigón producido).
  - $\sigma$ desviación típica poblacional.
- $f_{c,real}$: resistencia característica real (Percentil 5%, $P_5$)
- $f_{ck}$: resistencia característica especificada (nominal)

# El criterio de aceptación para la producción continua EN-206-1: 2000

## El criterio 1 de aceptación para la producción continua:

Se coge un grupo de $n = 15$ resultados de ensayos consecutivos. El criterio de aceptación es

$$\bar{x} \geq f_{ck} + 1.48\sigma$$

- $f_{ck}$: la resistencia característica especificada (nominal)
- $\sigma$: la desviación típica poblacional (estimada a partir de datos históricos)

# Guión

# Primer ingrediente: hipotésis estadística

Una hipótesis estadística es una proposición acerca del valor de un parámetro $\theta$ en el modelo considerado.
La formulación de un contraste pasa siempre por el planteamiento de dos hipótesis:

$$\begin{cases} H_0: \ \theta = \theta_0, & \text{Hipótesis nula} \\ H_1: \ \theta \neq \theta_0 & \text{Hipótesis alternativa} \end{cases}$$

Parámetro de interés: $\theta$. Valor concreto: $\theta_0$.
Ejemplo:

$$\begin{cases} H_0: \ f_{c,real} P_5 = f_{ck}, & \text{Hipótesis nula} \\ H_1: \ f_{c,real} P_5 \neq f_{ck} & \text{Hipótesis alternativa} \end{cases}$$

Parámetro de interés $f_{c,real}$. Valor concreto $f_{ck}$.

Contraste bilateral

# Primer ingrediente: hipotésis estadística (2)

Habrá veces en las que nos interesará más bien:

$$\begin{cases} H_0: \ \theta = \ \theta_0, & \text{Hipótesis nula} \\ H_1: \ \theta > \theta_0 & \text{Hipótesis alternativa} \end{cases}$$

o

$$\begin{cases} H_0: \ \theta = \ \theta_0, & \text{Hipótesis nula} \\ H_1: \ \theta < \theta_0 & \text{Hipótesis alternativa} \end{cases}$$

Contraste unilateral

# Segundo ingrediente: regla de decisión

Basándonos en un estadístico $T(X_1, \ldots, X_n)$, determino una región de rechazo $R$.(o una región de aceptación $A$)
Para mi muestra concreta, calculo el valor de $T(X_1, \ldots, X_n)$:

- Si pertenece a $R$, $\Rightarrow$, rechazo $H_0$
- Si no pertenece a $R$, $\Rightarrow$, acepto $H_0$

**Ejemplo del criterio de aceptación producción continua:**

Estadístico $T(X_1, \ldots, X_n) = \bar{X}$, la región de rechazo es

$$R = \{x < f_{ck} + 1.48\sigma\}.$$

# Tercer ingrediente: evaluación del error

Al tomar la decisión acerca de la veracidad de $H_0$, podemos cometer dos tipos de error:

- Error de tipo I: afirmar que $H_0$ es falsa cuando en realidad es cierta.
- Error de tipo II: afirmar que $H_0$ es cierta cuando en realidad es falsa.

# Cálculo de la probabilidad de cometer un error tipo I

## Probabilidad de cometer un error de tipo I:

Probabilidad de cometer el error de tipo I:

$$\alpha = \mathbb{P}_{H_0}(\text{Rechazar } H_0) = \mathbb{P}_{H_0}(T(X_1, \ldots, X_n) \in R),$$

Ejemplo producción continua:

*Suponiendo que $f_{c,real} = f_{ck}$, es decir, suponiendo que $f_{ck}$ coincide con $P_5$, el percentil 5 de la distribución de $f_c$, ¿cuál es la probabilidad de que $\bar{X} < f_{ck} + 1.48\sigma$? Sabemos $f_{c,real} = \mu - 1.64\sigma$, podemos calcular*

$$\alpha = \mathbb{P}(\bar{X} < f_{ck} + 1.48\sigma) \qquad \simeq 0.15$$

*EL criterio de rechazo es exigente: aún si se cumple $f_{ck} = P_5$, se rechazaría el 15 % de las observaciones...*

# Cálculo de la probabilidad de cometer un error tipo II

## Probabilidad de cometer un error de tipo II:

Probabilidad de cometer el error de tipo II:

$$\beta = \mathbb{P}_{H_1}(\text{Aceptar } H_0) = \mathbb{P}_{H_1}(T(X_1, \ldots, X_n) \notin R).$$

Sólo se puede calcular si se fija un valor concreto de $\theta$ en la alternativa $H_1$.

Ejemplo producción continua:

Suponiendo por ejemplo que $\mu = f_{ck}$, i.e $f_{ck} = P_{50}$, ¿cuál es la probabilidad de que $\bar{X} \geq f_{ck} + 1.48\sigma$?

$$\mathbb{P}(\bar{X} \geq f_{ck} + 1.48\sigma) \simeq 5 \cdot 10^{-9}$$

# Recapitulación: procedimiento

**Para llevar a cabo un contraste de hipótesis, tendremos que**

- Formular las hipótesis $H_0$ y $H_1$.
- Fijarnos la probabilidad de error de tipo I, $\alpha$.
  Tipicamente: $\alpha = 0.05$, $0.01$ o $0.1$. (95%, 99% ó 90% de confianza)
- Escogemos el estadístico de prueba $T(X_1, \ldots, X_n)$ basado generalmente en un estimador del parámetro. Describimos su distribución muestral bajo la hipótesis de que $H_0$ es cierta.
- Determinamos la región de rechazo $R$ de tal manera que la probabilidad de rechazar $H_0$ cuando ésta es cierta coincida con el valor prefijado de $\alpha$, es decir

$$\mathbb{P}_{H_0}(T(X_1, \ldots, X_n) \in R) = \alpha.$$

# Guión

# Contraste de hipótesis para la media $\mu$ de una distribución Normal con varianza conocida.

## Contexto

- Consideramos una v.a $X$.
- Hemos decidido modelar: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
  Tenemos fijado el valor de $\sigma$, (valor poblacional, por ejemplo gracias a datos históricos).
- Queremos llevar a cabo un contraste sobre $\mu$,
- Para ello, extraeremos una muestra de tamaño $n$ de la distribución de $X$.

# Procedimiento, hipótesis bilateral

- Formulamos las hipótesis:

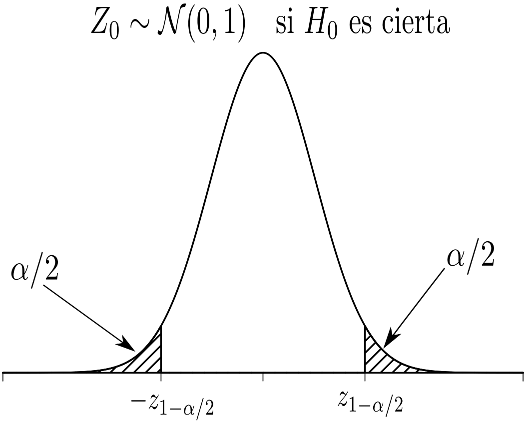
$$\begin{cases} H_0: \ \mu = \mu_0, \\ H_1: \ \mu \neq \mu_0, \end{cases}$$

  donde $\mu_0$ representa el valor concreto con él que queremos comparar $\mu$.
- Nos fijamos el valor de $\alpha$.
- El estadístico de prueba es la versión tipificada de $\bar{X}$: si $H_0$ es cierto, $\mu = \mu_0$

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

# Procedimiento, hipótesis bilateral

- Establecemos la región de rechazo:



# Procedimiento, hipótesis bilateral

- La región $R$ está formada por los valores menores que $-z_{1-\alpha/2}$ o mayores que $z_{1-\alpha/2}$.
- Nos queda calcular, para nuestra muestra, el valor concreto del estadístico de prueba $Z_0$:
  - Si pertenece a $R$, rechazaremos $H_0$ y afirmaremos $H_1$
  - Si no pertenece a $R$, admitiremos $H_1$.

# Ejemplo

- En un proceso de producción, la longitud de los artículos producidos se modeliza a través de una distribución Normal con media $\mu$.
- Por experiencia acerca del proceso, se cuantifica su desviación típica en $\sigma = 1mm$.
- En condiciones de funcionamiento correcto, se espera que la longitud media de los artículos sea 50mm.
- Para comprobar la calidad se decide tomar una muestra de 10 artículos que resultan tener una longitud media $\bar{X}$ igual a 51mm.
- Basándonos en esta muestra, ¿qué podemos decir acerca del funcionamiento del proceso?

# Resolución

- La variable que introducimos asociada al experimento "producir una pieza", es $X$="longitud de la pieza producida".
- Planteamos las hipótesis

$$\begin{cases} H_0: & \mu = 50, \\ H_1: & \mu \neq 50. \end{cases}$$

- Decidimos trabajar al 95% de confianza, que es el nivel estándar de confianza, es decir que nos fijamos $\alpha = 0.05$.
- El estadístico de prueba es $Z_0 = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$, que sigue una distribución Normal estándar si $H_0$ es cierta.

# Resolución

- Las fronteras de la región de rechazo son $-z_{1-\alpha/2} = -z_{0.975} = -1.96$ y $-z_{1-\alpha/2} = 1.96$.
- Basándonos en la muestra, calculamos el valor de $Z_0$:

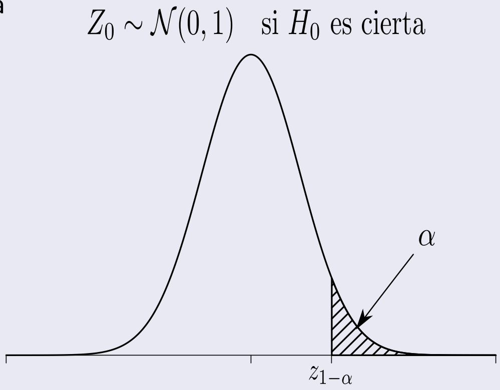
$$Z_0 = \frac{51 - 50}{1/\sqrt{10}} \simeq 3.162.$$

- Puesto que $Z_0$ pertenece a $R$, rechazamos $H_0$ y afirmamos al 95% de confianza que el proceso está desajustado.

# Procedimiento, hipótesis unilateral

## Todo igual, excepto *R*

- Si la hipótesis alternativa es $H_1: \ \mu > \mu_0$, la región de rechazo será



# Ejemplo

Creo que un aparato de medición de una señal sobrevalora su valor real. Para comprobarlo pienso realizar 5 mediciones de una señal simple cuyo valor sé es igual a 10000. Considerando que la distribución de los valores medidos se puede modelizar por una Normal con desviación típica igual a 500.

Llevar a cabo el contraste para comprobar si el valor central de los valores medidos es superior a 10000, si he encontrado un valor promedio de 10300 para las 5 mediciones de la muestra.

# Resolución

- La variable que introducimos asociada al experimento "realizar una medición", es $X$="valor proporcionado por el aparato".
- Planteamos las hipótesis

$$\begin{cases} H_0: & \mu = 10000, \\ H_1: & \mu > 10000, \end{cases}$$

- Decidimos trabajar al 95% de confianza, que es el nivel estándar de confianza, es decir que nos fijamos $\alpha = 0.05$.
- El estadístico de prueba es $Z_0 = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$, que sigue una distribución Normal estándar si $H_0$ es cierta.

# Resolución

- La región de rechazo está constituida por los valores mayores que $z_{1-\alpha} = z_{0.95} = 1.64$.
- Para mi muestra, el valor de $Z_0$ es

$$Z_0 = \frac{10300 - 10000}{500/\sqrt{5}} \simeq 1.34.$$

- Deducimos que $Z_0$ no pertenece a $R$, por lo que no podemos rechazar $H_0$: los datos no contradicen $H_0$.