

Laboratorio de Comunicaciones

Lazo enganchado en fase

Fernando D. Quesada Pereira¹

¹Departamento de Tecnologías de la Información y las Comunicaciones
Universidad Politécnica de Cartagena

24 de mayo de 2010

Índice de Contenidos

- 1 Introducción
- 2 Análisis del transitorio de un PLL
- 3 Filtros de lazo
- 4 Estudio del transitorio de enganche
- 5 Características de los PLLs
- 6 Aplicaciones de los PLLs

Características principales de los PLLs

- Un PLL (**Phase Locked Loop**) consta de un oscilador que sigue en fase una señal de entrada.
- Se utiliza un **VCO (Voltage Control Oscillator)**, que es un oscilador que varía su frecuencia (no fase) en función de la tensión aplicada a su entrada. La frecuencia instantánea del VCO será:

$$f(t) = f_0 + K_V V(t)$$

- Se trata de una desviación de frecuencia respecto de la portadora (f_0). Es una desviación proporcional a la tensión aplicada (K_V (Hz/V) constante del VCO).
- Para la anterior frecuencia instantánea del VCO, se tiene:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt} \quad ; \quad \theta(t) = 2\pi \int_0^t f(\tau) d\tau$$

- El término $\theta(t)$ es la **fase instantánea** del VCO. Es esta fase la que **debe seguir** las variaciones de fase de la señal de entrada (la sigue en cuadratura).

Esquema de un PLL

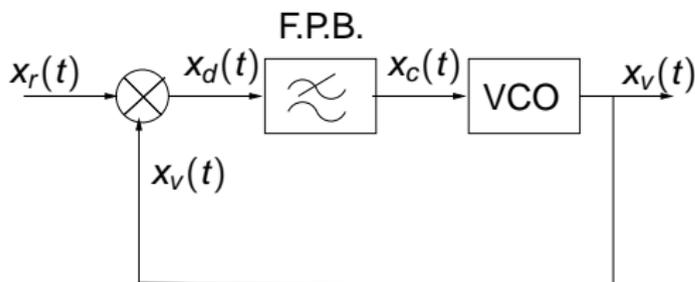


Figura: Esquema genérico de un PLL

Análisis del PLL (I)

- El **detector de fase** puede ser un **mezclador** que contenga un elemento no lineal, obteniendo a la salida el producto de 2 señales.
- Se supone que se recibe la señal $x_r(t) = A_r \cos(\omega_r t)$.
- La señal de salida del VCO ($x_v(t)$) se intenta enganchar **en cuadratura** a la señal de entrada ($x_r(t)$).
- Se supone que la señal $x_v(t) = A_v \sin(\omega_v t + \varphi_0)$ es de distinta frecuencia y fase que la de entrada $x_r(t)$ (y además en **cuadratura**).

Análisis del PLL (II)

- El término φ_0 es el error de fase o diferencia de fase respecto a la cuadratura de la señal de entrada.
- A la salida del detector de fase se tiene:

$$x_d(t) = x_r(t) \cdot x_v(t)$$

$$x_d(t) = A_r \cos(\omega_r t) \cdot A_v \sin(\omega_v t + \varphi_0)$$

$$x_d(t) = \frac{A_r A_v}{2} \left\{ \sin((\omega_v - \omega_r)t + \varphi_0) + \sin((\omega_v + \omega_r)t + \varphi_0) \right\}$$

- Se supone que existe enganche en frecuencia entre el VCO y la señal recibida ($\omega_r = \omega_v$).

$$x_d(t) = A_r A_v \frac{1}{2} \left[\sin \varphi_0 + \sin(2\omega_r t + \varphi_0) \right]$$

- Tras el filtro paso bajo de lazo se elimina el término de frecuencia doble $2\omega_r$.

$$x_d(t) = \frac{A_r A_v}{2} \sin \varphi_0$$

- Si el error de fase es pequeño entonces $\sin \varphi_0 \rightarrow \varphi_0$.

$$X_d(t) = \frac{A_r A_v}{2} \varphi_0 = A_d \varphi_0$$

Análisis del PLL (III)

- ➡ La señal a la salida del detector de fase es proporcional a la **diferencia de fase entre las dos señales**.
- ➡ Tras el **filtro de lazo** (normalmente paso bajo), la señal se aplica al VCO, y éste modifica su frecuencia instantánea según:

$$f(t) = f_0 + K_0 x_c(t) = f_0 + K_v A_d \varphi_0$$

- ➡ El proceso continúa hasta que las **fases de las dos señales se igualan**, momento en el que el circuito está enganchado en fase.

Transitorios del PLL (T. Laplace)

- El siguiente paso es realizar un análisis de los **transitorios del circuito**.
- El análisis se hará en el **dominio de Laplace**.

Transitorio de un PLL

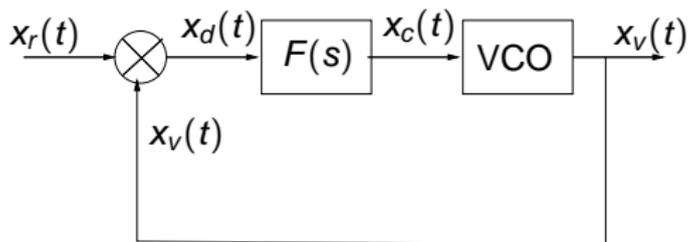


Figura: Esquema genérico de un PLL

Transitorios del PLL (T. Laplace) (II)

- La fase instantánea de la señal recibida $x_r(t)$ es: $\theta_r(t) = \omega_r t + \phi_r(t)$
- La fase de la señal del VCO es: $\theta_v(t) = \omega_v t + \phi_v(t)$
- Se supone que hay **enganche en la parte lineal** ($\omega_r = \omega_v$) de la variación de fase (como antes, enganche en frecuencia).

Transitorios del PLL (T. Laplace) (III)

- ✓ A la salida del mezclador se tiene una señal proporcional a la diferencia de fases (según lo visto antes, $A_d = A_r A_v / 2$).

$$x_d(t) = [\phi_r(t) - \phi_v(t)] A_d$$

$$X_d(s) = [\Phi_r(s) - \Phi_v(s)] A_d$$

- ✓ A la salida del filtro $F(s)$ se tiene:

$$X_c(s) = F(s) X_d(s) = F(s) A_d [\Phi_r(s) - \Phi_v(s)]$$

- ✓ La frecuencia instantánea del VCO es proporcional a la tensión $x_c(t)$: $f(t) = K_v x_c(t)$.
- ✓ **Nota:** En la relación anterior no es importante la frecuencia natural f_0 del VCO, ya que hay enganche en la variación lineal de la fase $\omega_r = \omega_v = \omega_0$.
- ✓ K_v es la **constante del VCO** y se mide en (Hz/V).
- ✓ A_d es la **constante del detector de fase** y se mide en (V/rad).

Transitorios del PLL (T. Laplace) (IV)

⇒ La **fase instantánea** de la salida del VCO se sabe que es:

$$\phi_v(t) = 2\pi \int_0^t f(\tau) d\tau = 2\pi K_v \int_0^t x_c(t) d\tau$$

⇒ La anterior relación se pasa al dominio de Laplace ($f \rightarrow \frac{1}{s}$): $\Phi_v(s) = 2\pi K_v \frac{X_c(s)}{s}$.

⇒ Se sustituye la $\Phi_v(s)$ en la expresión de la señal a la salida del filtro $X_c(s)$ y se llega a:

$$\begin{aligned} \frac{s}{2\pi K_v} \Phi_v(s) &= F(s)[\Phi_r(s) - \Phi_v(s)] A_d \\ \left[\frac{s}{2\pi K_v A_d} + F(s) \right] \Phi_v(s) &= F(s) \Phi_r(s) \end{aligned}$$

⇒ La **función de transferencia de fase del PLL $H(S)$** es:

$$H(s) = \frac{\Phi_v(s)}{\Phi_r(s)} = \frac{F(s)}{\frac{s}{2\pi K_v A_d} + F(s)} = \frac{2\pi K_v A_d F(s)}{s + 2\pi K_v A_d F(s)} = \frac{K F(s)}{s + K F(s)} = \frac{K \frac{F(s)}{s}}{1 + K \frac{F(s)}{s}}$$

Transitorio de un PLL

Orden y tipo de un PLL

Ganancia de Lazo

- Al término $K = 2\pi K_v A_d$ se le denomina **ganancia de lazo**.
- La **ganancia** total del bucle K interviene en la **estabilidad del circuito**, al encontrarse éste realimentado (el circuito puede hacerse inestable).
- Para frecuencia cero $s = j\omega = 0$, se tiene que $\Phi_v(s) = \Phi_r(s)$ (ambas fases son iguales).

Orden del PLL

- ☞ Si el número de polos filtro de lazo $F(s)$ es n , entonces el número de polos de la función de transferencia es $(n + 1)$.
- ☞ Se llama **orden del PLL** al **número de polos** de la función de transferencia de fase $H(s)$.
- ☞ El orden del PLL también puede verse como el grado de la ecuación característica $1 + K \frac{F(s)}{s} = 0$. Si el grado es $(n + 1)$, la función tiene $n + 1$ polos (orden del PLL).

Transitorio de un PLL

Orden y tipo de un PLL

Tipo de un PLL

- El **tipo de un PLL** es el número de polos en el origen que presenta la función $\left[1 + K \frac{F(s)}{s}\right]$.
- Esta función siempre tiene un polo en el origen, por lo que el PLL siempre es **como mínimo de tipo 1**.
- Si $F(s)$ no tiene polos en el origen, entonces el tipo del PLL es 1.

PLL de orden 1 y tipo 1

Estudio de la función de transferencia de fase $H(s)$.

Función de transferencia

- ✓ Se corresponde con el caso en que **no hay filtro de lazo** $F(s) = 1$.

$$H(s) = \frac{\Phi_v(s)}{\Phi_r(s)} = \frac{K}{s + K}$$

- ✓ En el tiempo se tiene una respuesta al impulso:

$$h(t) = Ke^{-Kt}$$

- ✓ K afecta a la ganancia y a la amortiguación.
- ✓ Si $K \uparrow\uparrow$, el circuito es más rápido y tarda menos en llegar al régimen permanente.
- ✓ La función de transferencia $H(s)$ presenta un polo en $s = -k$, por lo que **siempre es estable**.

Ancho de banda equivalente de ruido

Ancho de banda equivalente de ruido

Es el ancho de un **filtro rectangular que deja pasar el mismo ruido que un filtro real**, cuando a la entrada hay un **ruido blanco** (es plano en todas las frecuencias).

Definición matemática

- ⇒ La **ganancia central** en ambos filtros debe ser **la misma**.
- ⇒ La **potencia de ruido** a la salida tras el filtrado es para el filtro rectangular (siendo $G_R(f)$ la densidad espectral de potencia).

$$P_R = \int_0^{\infty} |G_R(f)|^2 df = \eta_0 B$$

- ⇒ Para el otro filtro se tiene:

$$P_S = \int_0^{\infty} |G_S(f)|^2 df$$

- ⇒ **Igualando** ambas potencias se llega a:

$$\eta_0 B = \int_0^{\infty} |G_S(f)|^2 df$$

$$B = \frac{1}{\eta_0} \int_0^{\infty} |G_S(f)|^2 df = \frac{1}{2\pi\eta_0} \int_0^{\infty} |G_S(\omega)|^2 d\omega$$

Ancho de banda equivalente de ruido

Ejemplo para un PLL de orden 1 y tipo 1

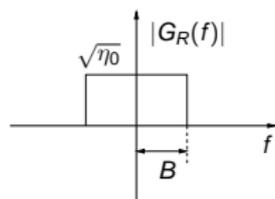


Figura: Filtro equivalente

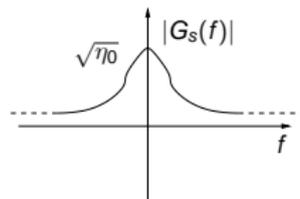


Figura: Filtro original

La **función de transferencia de fase** para un PLL de orden 1 y tipo 1 es $H_{PLL}(s) = \frac{K}{s+K}$. En **regimen estacionario sinusoidal** $s = j\omega$, se tiene:

$$H_{PLL}(\omega) = \frac{K}{j\omega + K} \quad ; \quad |H_{PLL}| = \frac{K}{\sqrt{K^2 + \omega^2}}$$

Consideramos que $\eta_0 = 1$, por lo que el **ancho de banda equivalente** se calcula como:

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{K^2}{\omega^2 + K^2} d\omega = \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{K} \right) \Big|_0^\infty \frac{K}{2\pi} \\ &= \frac{K}{2\pi} \left(\tan^{-1}(\infty) - \tan^{-1}(0) \right) = \frac{K}{2\pi} \frac{\pi}{2} = \frac{K}{4} \end{aligned}$$

PLL de orden 2 y tipo 1 con filtro RC

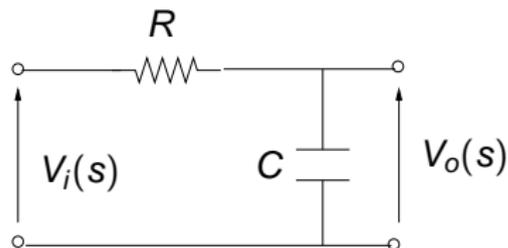


Figura: Filtro RC

- En aplicaciones comerciales, el filtro **más utilizado** es un paso bajo sencillo de **tipo RC** (orden 2, tipo 1).
- Se tiene del divisor de tensión que:

$$V_o(s) = V_i(s) \frac{\frac{1}{sC}}{1 + \frac{1}{sC}} = V_i(s) \frac{1}{1 + sCR}$$

Función de transferencia y tipo

- La **función de transferencia** del filtro $F(s)$ es:

$$F(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{1 + sCR}$$

- El **tipo** del PLL es 1, ya que $a + K \frac{F(s)}{s} = 1 + K \frac{1}{s(1+sCR)}$ sólo tiene un polo en el origen.

PLL de orden 2 y tipo 1 con filtro RC

Función de transferencia de fase, estabilidad, coeficiente de amortiguamiento y pulsación propia

Estudio PLL orden 2 y tipo 1

➡ La función de transferencia en fase queda como:

$$H(s) = \frac{\Phi_v(s)}{\Phi_r(s)} = \frac{K F(s)}{s + K F(s)} = \frac{K \frac{1}{1+sCR}}{s + K \frac{1}{1+sCR}} = \frac{K}{s^2 CR + s + K} = \frac{K CR}{s^2 + \frac{s}{CR} + \frac{K}{CR}}$$

➡ La **estabilidad del PLL** viene determinada por los ceros del denominador (polos de la función de transferencia).

$$s = \frac{-\frac{1}{CR} \pm \sqrt{\frac{1}{C^2 R^2} - \frac{4K}{CR}}}{2} = \frac{-\frac{1}{CR} \pm \frac{2\sqrt{K}}{\sqrt{CR}} \sqrt{\frac{1}{4CRK} - 1}}{2}$$

➡ Se definen los factores:

Coeficiente de amortiguamiento $\cdot \xi^2 = \frac{1}{4CRK}$

Pulsación propia $\cdot \omega_n^2 = \frac{K}{CR}$

PLL de orden 2 y tipo 1 con filtro RC

Ancho de banda equivalente de ruido, estabilidad

- ✓ Se tienen las relaciones:

$$\xi^2 \omega_n^2 = \frac{1}{4CRK} \frac{K}{CR} = \frac{1}{4C^2R^2} \quad ; \quad 2\xi\omega_n = \frac{1}{CR}$$
$$\omega_n^2 = 2\xi\omega_m K \quad ; \quad K = \frac{\omega_n}{2\xi}$$

- ✓ Se puede demostrar que el **ancho de banda de ruido equivalente** para un PLL fabricado con este filtro es $B = \frac{K}{4} = \frac{\omega_n}{8\xi}$.
- ✓ Las raíces de la función de transferencia de fase se pueden escribir en términos del coeficiente de amortiguamiento y la pulsación propia.

$$s = \frac{-2\xi\omega_n \pm 2\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}}{2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

- ✓ La **función de transferencia de fase $H(s)$** se escribe en términos de ξ y ω_n .

$$H(s) = \frac{\Phi_v(s)}{\Phi_s(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

- ✓ Las raíces están en el semiplano izquierdo si $\xi\omega_n > 0$. Por otra parte, $\xi\omega_n = \frac{1}{2CR} > 0$, por lo que el sistema es **siempre estable**.

PLL de orden 2 y tipo 1 con filtro RC

Tipos de factor de amortiguamiento

Clases de amortiguamiento

$\xi > 1$. Amortiguamiento super-crítico, raíces reales y distintas.

$\xi = 1$. Amortiguamiento crítico, raíz real y doble.

$\xi < 1$. Amortiguamiento sub-crítico, raíces complejas.

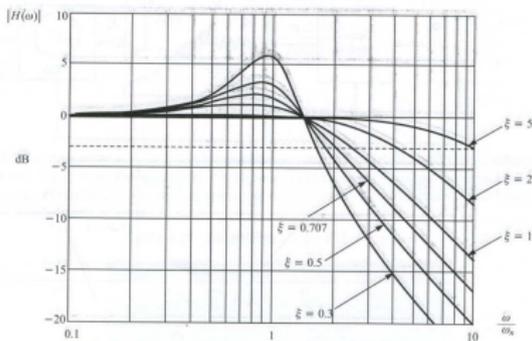


Figura: Función de transferencia PLL del tipo 2 y orden 2.

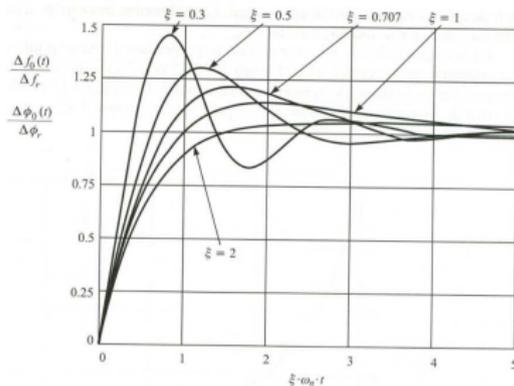
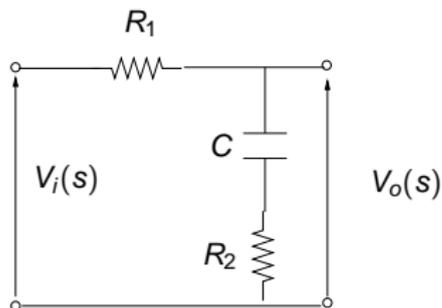


Figura: Respuesta al escalón PLL del tipo 2 y orden 2.

PLL de orden 2 y tipo 1 con filtro lead-lag pasivo

Función de transferencia, función de transferencia de fase, B_{eq} de ruido



- Analizando el divisor de tensión se tiene:

$$V_o(s) = V_i(s) \frac{R_2 + \frac{1}{sC}}{R_2 + \frac{1}{sC} + R_1}$$

- La **función de transferencia del filtro $F(s)$**

queda como: $F(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1+sCR}{(R_1+R_2)sC+1}$

Figura: Filtro Lead-Lag Pasivo

- El **ancho de banda equivalente de ruido** es $B = \pi\omega_n \left(\xi + \frac{1}{4\xi} \right)$.
- Se definen las **constantes de tiempo** $\tau_1 = R_1 C$ y $\tau_2 = R_2 C$, quedando la función de transferencia como: $F(s) = \frac{1+s\tau_2}{(\tau_1+\tau_2)s+1}$
- La **función de transferencia de fase $H(s)$** queda como:

$$H(s) = \frac{\Phi_v(s)}{\Phi_r(s)} = \frac{K F(s)}{s + K F(s)} = \frac{K \frac{1+s\tau_2}{(\tau_1+\tau_2)s+1}}{s + K \frac{1+s\tau_2}{(\tau_1+\tau_2)s+1}} = K \frac{1 + s\tau_2}{(\tau_1 + \tau_2)s^2 + s + K + s\tau_2 K}$$

PLL de orden 2 y tipo 1 con filtro lead-lag pasivo

Función de transferencia de fase, amortiguamiento y pulsación propia

- ▶ La expresión final de la **función de transferencia de fase** queda como:

$$H(s) = \frac{\frac{(K+sK\tau_2)}{(\tau_1+\tau_2)}}{s^2 + \left(\frac{1+\tau_2 K}{\tau_1+\tau_2}\right)s + \frac{K}{\tau_1+\tau_2}}$$

- ▶ Encontrando los **ceros del denominador** (polos de la función de transferencia) se tiene:

$$s = \frac{-\frac{(1+\tau_2 K)}{(\tau_1+\tau_2)} \pm \sqrt{\left(\frac{(1+\tau_2 K)}{(\tau_1+\tau_2)}\right)^2 - \frac{4K}{\tau_1+\tau_2}}}{2} = \frac{-\frac{(1+\tau_2 K)}{(\tau_1+\tau_2)} \pm \frac{2\sqrt{K}}{\sqrt{\tau_1+\tau_2}} \sqrt{\frac{(1+\tau_2 K)^2}{(\tau_1+\tau_2)K^4} - 1}}{2}$$

- ▶ Se define la **pulsación propia** como $\omega_n^2 = \frac{K}{\tau_1+\tau_2}$.
- ▶ El **coeficiente de amortiguamiento** $\xi^2 = \frac{(1+\tau_2 K)^2}{(\tau_1+\tau_2)K^4}$.
- ▶ Se tienen las relaciones

$$\omega_n^2 \xi^2 = \frac{K}{\tau_1 + \tau_2} \frac{(1 + \tau_2 K)^2}{4K(\tau_1 + \tau_2)} = \frac{(1 + \tau_2 K)^2}{4(\tau_1 + \tau_2)^2} ; \quad 2\omega_n \xi = \frac{1 + \tau_2 K}{\tau_1 + \tau_2}$$

PLL de orden 2 y tipo 1 con filtro lead-lag pasivo

Función de transferencia de fase, estabilidad, ancho de banda equivalente de ruido

- Los **polos** de la función de transferencia quedan como:

$$s = \frac{-2\xi\omega_n \pm 2\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}}{2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$
$$2\xi\omega_n - \frac{\omega_n^2}{K} = \frac{1 + \tau_2 K}{\tau_1 + \tau_2} - \frac{1}{\tau_1 + \tau_2} = \frac{\tau_2 K}{\tau_1 + \tau_2}$$

- La **función de transferencia de fase** queda como:

$$H(s) = \frac{\Phi_v(s)}{\Phi_r(s)} = \frac{s\left(2\xi - \frac{\omega_n^2}{K}\right) + \omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n\xi s + \omega_n^2}$$

- Se puede comprobar que $\omega_n\xi = \frac{1 + \tau_2 K}{2(\tau_1 + \tau_2)} > 0$, por lo que el circuito tiene los polos en el semiplano izquierdo (el **circuito es estable**).
- El **ancho de banda equivalente de ruido** es:

$$B = \pi\omega_n \left(\xi + \frac{1}{4\xi} \right)$$

PLL de orden 2 y tipo 2 con filtro lead-lag activo

Filtro activo con un amplificador operacional

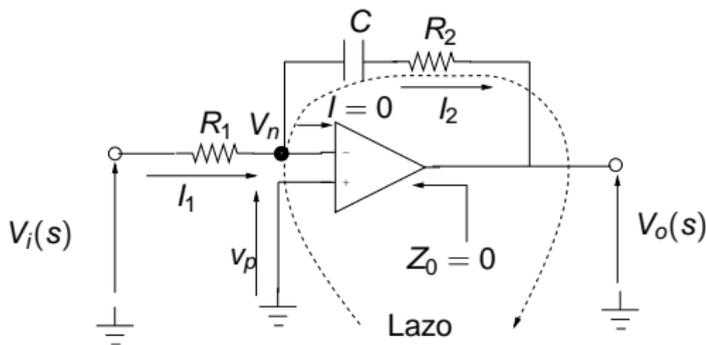


Figura: Filtro Lead-Lag Activo

Análisis del circuito

$$I_1 = \frac{V_i(s) - V_n(s)}{R_1} = \frac{V_i(s)}{R_1} \quad ; \quad I_1 = I_2$$

$$0 = I_2 \left(\frac{1}{Cs} + R_2 \right) + V_o(s) \quad ; \quad I_2 = \frac{-V_o(s)}{\frac{1}{Cs} + R_2} \quad (\text{en el lazo})$$

$$\frac{V_i(s)}{R_1} = \frac{-V_o(s)}{R_2 + \frac{1}{Cs}} \quad ; \quad F(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{R_2 + \frac{1}{Cs}}{R_1} = \frac{1 + CR_2s}{CR_1s}$$

PLL de orden 2 y tipo 2 con filtro lead-lag activo

Función de transferencia de fase, orden y tipo

- Se definen las constantes de tiempo $\tau_1 = CR_1$ y $\tau_2 = CR_2$.
- la **función de transferencia** del filtro queda como $F(s) = \frac{1+\tau_2}{s\tau_1}$.
- La **función de transferencia de fase** $H(s)$ es:

$$H(s) = \frac{\Phi_v(s)}{\Phi_r(s)} = \frac{K F(s)}{s + K F(s)} = \frac{K \left(\frac{1+\tau_2 s}{s\tau_1} \right)}{s + K \left(\frac{1+\tau_2 s}{s\tau_1} \right)} = \frac{K(1 + \tau_2 s)}{s^2\tau_1 + K\tau_2 s + K}$$

- El PLL es de **orden 2 y tipo 2**. La función $1 + K \frac{F(s)}{s} = 1 + K \frac{1+\tau_2 s}{s^2\tau_1}$ (polo de orden 2 en el origen \rightarrow es de tipo 2).
- Los **polos** de la función de transferencia de fase $H(s)$ son:

$$s = \frac{-K \frac{\tau_2}{\tau_1} \pm \sqrt{\frac{K^2 \tau_2^2}{\tau_1^2} - \frac{4K}{\tau_1}}}{2} = \frac{-K \frac{\tau_2}{\tau_1} \pm \frac{2\sqrt{K}}{\sqrt{\tau_1}} \sqrt{\frac{K\tau_2^2}{4\tau_1} - 1}}{2}$$

Pulsación propia, amortiguamiento, estabilidad

- Se tienen las relaciones $\omega_n^2 = \frac{K}{\tau_1}$ y $\xi^2 = \frac{K\tau_2^2}{4\tau_1}$:

$$\omega_n^2 \xi^2 = \frac{K\tau_2^2}{4\tau_1} \frac{K}{\tau_1} = \frac{1}{4} \frac{K^2 \tau_2^2}{\tau_1^2} ; \quad 2\omega_n \xi = \frac{K\tau_2}{\tau_1}$$

- La **función de transferencia de fase** $H(s)$ se puede escribir como:

$$H(s) = \frac{\Phi_v(s)}{\Phi_r(s)} = \frac{2\omega_n \xi s + \omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n \xi s + \omega_n^2}$$

- Los polos de la función de transferencia quedan como:

$$s = \frac{-2\omega_n \xi \pm 2\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}}{2} = -\omega_n \xi \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

- Se cumple que $\omega_n \xi = \frac{1}{2} K \frac{\tau_2}{\tau_1} > 0$, por lo que las raíces se encuentran en el semiplano izquierdo y **el PLL es estable**.

Transitorio de enganche

Teorema del valor final

- ✓ Se estudia la **capacidad de los PLL para engancharse**.
- ✓ Se supone que existe un **error de fase** entre la señal de entrada y la señal que sale del circuito.
- ✓ Se pretende ver si el circuito es capaz de hacer cero ese error de fase.
- ✓ La función del error es $\epsilon(t) = \phi_r(t) - \phi_v(t)$. En el dominio de Laplace se tiene:

$$E(s) = \Phi_r(s) - \Phi_v(s); E(s) = \Phi_r(s) \left[1 - \frac{\Phi_v(s)}{\Phi_r(s)} \right]; E(s) = \Phi_r(s) \left[1 - \frac{K F(s)}{s + K F(s)} \right]$$

- ✓ Se supone que la señal de entrada sufre un salto de $\Delta\phi$ (escalón de fase).

$$\phi_r(t) = \Delta\phi u(t) \quad ; \quad \Phi_r(s) = \frac{\Delta\phi}{s}$$

Teorema del valor final (error en tiempo infinito)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

Transitorio de enganche

Errores para un PLL de orden 1 y tipo 1

- Según el teorema del valor final, para un **PLL de orden 1 y tipo 1** $F(s) = 1$ con error de fase constante $\Delta\phi$, se tiene:

$$\lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\Delta\phi}{s} \left[1 - \frac{K}{s+K} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s+K} \Delta\phi = 0$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\Delta\phi}{s} (1 - 1) = 0$$

- El PLL se **consigue en enganchar en fase** para un PLL de orden 1 y tipo 1.
- Para un error de fase lineal (corresponde a un **salto de frecuencia constante**) se tiene:

$$\phi_r(t) = \Delta\phi \cdot tu(t) \quad \text{En Laplace} \quad \Phi_r(s) = \frac{\Delta\phi}{s^2}$$

- Aplicando el teorema del valor final:

$$\lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\Delta\phi}{s^2} \left[1 - \frac{K}{s+K} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s+K} \frac{\Delta\phi}{s} = \frac{\Delta\phi}{K}$$

- Existe un **error de fase constante**. El PLL se engancha en frecuencia, y la **fase tendrá un error con respecto a la señal de entrada**.
- El error de fase depende del salto $\Delta\phi$ y de la ganancia de lazo del PLL K (interesa un K alto para disminuir el error, pero aumenta el B_{eq} de ruido).

Errores para un PLL de orden 2 y tipo 2 (Lead-Lag activo). Salto de fase

- El error de fase en el dominio de Laplace se puede escribir como:

$$E(s) = \Phi_r(s) \left[1 - \frac{\Phi_v(s)}{\Phi_r(s)} \right] = \Phi_r(s) \left[1 - \frac{2\omega_n \xi s + \omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n \xi s + \omega_n^2} \right] = \Phi_r(s) \left[\frac{s^2 + 2\omega_n \xi s + \omega_n^2 - 2\omega_n \xi s - \omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n \xi s + \omega_n^2} \right] = \Phi_r(s) \frac{s^2}{s^2 + 2\omega_n \xi s + \omega_n^2}$$

- Si existe un salto de fase $\phi_r(t) = \Delta\phi u(t)$, $\Phi_r(s) = \frac{\Delta\phi}{s}$, el error queda como:

$$E(s) = \frac{\Delta\phi}{s} \frac{s^2}{s^2 + 2\omega_n \xi s + \omega_n^2}$$

- Aplicando el teorema del valor final:

$$\lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \Delta\phi \frac{s^2}{s^2 + 2\omega_n \xi s + \omega_n^2} = 0$$

- El PLL **se engancha en fase ante un salto de fase constante.**

Errores para un PLL de orden 2 y tipo 2 (Lead-Lag activo). Salto de frecuencia

- Para un salto de frecuencia se tiene $\phi_r(t) = \Delta\phi t u(t)$, $\Phi_r(s) = \frac{\Delta\phi}{s^2}$.
- EL error de fase que da como :

$$E(s) = \frac{\Delta\phi}{s^2} \frac{s^2}{s^2 + 2\omega_n \xi s + \omega_n^2}$$

- Aplicando el teorema del valor final:

$$\lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \Delta\phi \frac{s}{s^2 + 2\omega_n \xi s + \omega_n^2} = 0$$

- El PLL vuelve a engancharse en fase, aunque haya un salto de frecuencia.
- El enganche se debe a que el PLL es de tipo 2 (son capaces de engancharse en fase ante un salto de frecuencia).
- **Ejercicio.**- Repita el proceso para una rampa en frecuencia $\phi_r(t) = \Delta\phi t^2 u(t)$.

Ejercicio propuesto

Estudio de un PLL (I)

Se tiene el esquema de un lazo enganchado en fase (PLL) en la figura.

- Describa la función de cada uno de los bloques representados en la figura. ¿Cual es el significado de las constantes A_d y K_0 ?. Por último, obtenga de forma justificada la función de transferencia de fase del PLL $H(s) = \phi_v(s)/\phi_r(s)$.
- Explique las características de los distintos filtros presentados en teoría: Atenuador o amplificador de ganancia constante, filtro RC, filtro lead-lag pasivo y lead-lag activo. Diga, en cada caso, el error de fase que se produce en régimen permanente ante un salto de fase y un salto de frecuencia.

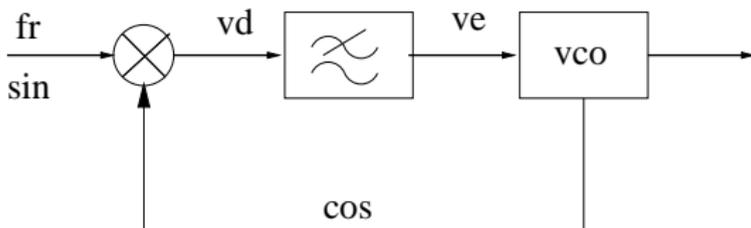


Figura: Esquema de un lazo enganchado en fase (PLL)

Ejercicio propuesto

Estudio de un PLL (II)

Se propone el estudio del comportamiento de un PLL que incorpore alternativamente los filtros representados en las figuras.

- Diga el orden y el tipo de cada filtro. Calcule, en su caso, la pulsación propia ω_n y el coeficiente de amortiguamiento ξ .
- Estudie el enganche del PLL para cada filtro cuando en la señal de entrada se produce un escalón de fase. Repita lo mismo para un escalón de frecuencia. ¿Existe alguna forma de reducir el error?

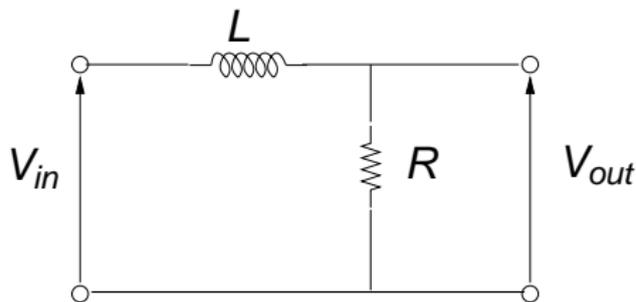


Figura: Filtro LR del PLL

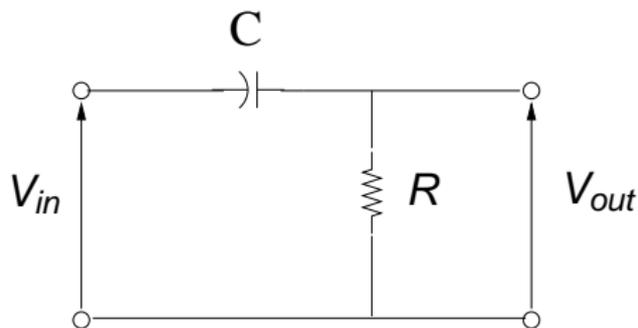


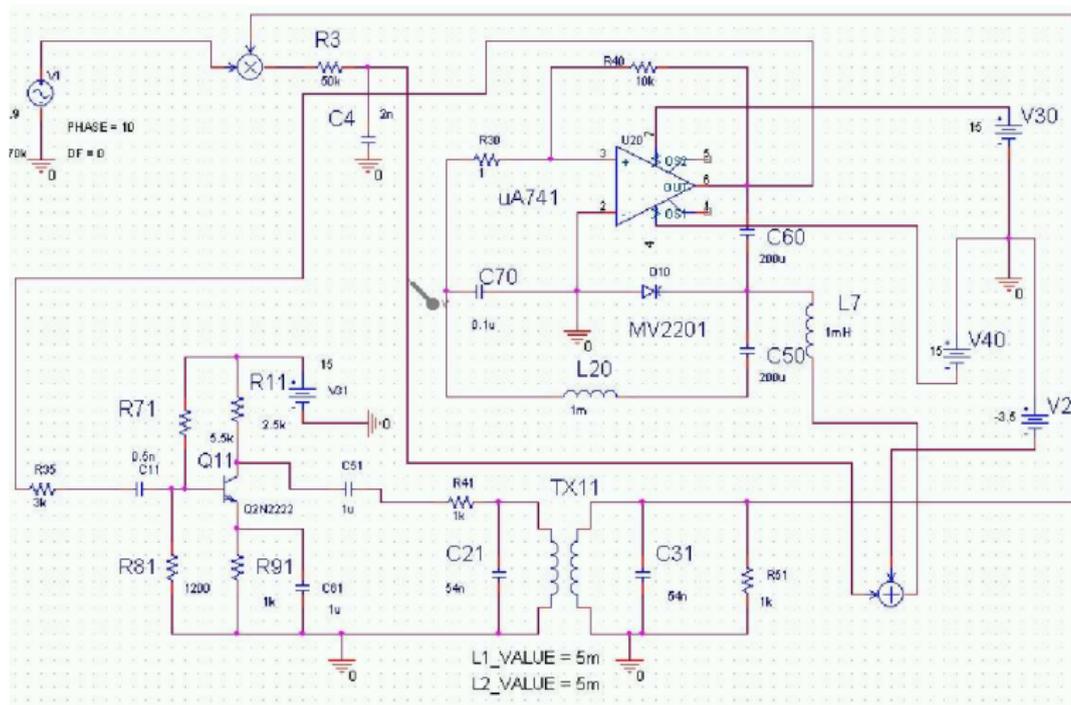
Figura: Filtro CR del PLL

- Proponga un PLL, indicando su orden y tipo, que sea capaz de engancharse en fase ante una rampa de frecuencia. Demuestre por qué el error de fase es nulo. Dibuje el diagrama de Lissajous resultante cuando a la entrada de dicho PLL se produce un salto de frecuencia.
- ¿Qué entiende por ancho equivalente de ruido de un PLL?. ¿En qué afecta la ganancia del PLL?
- Proponga tres PLLs (orden 1 y tipo 1, orden 2 y tipo 1, orden 2 y tipo 2). Diga como será el error de fase para cada uno de ellos, si la señal de entrada al PLL es una rampa en frecuencia. Dibuje como será el diagrama de Lissajous resultante en cada caso.

Ejercicio propuesto

Estudio práctico de un PLL (I)

Partiendo de la figura conteste a las siguientes cuestiones:



Ejercicio propuesto

Estudio práctico de un PLL (II)

- 1 Analizando el circuito propuesto para un PLL, marque qué puntos se corresponden con la entrada y salida de cada una de las etapas q que componen un PLL. En concreto distinga:
 - Detector
 - Filtro
 - VCO
- 2 ¿Qué función tiene el conjunto formado por el transistor y el transformador?
- 3 ¿Qué desfase deberá tener la señal generada por el VCO respecto a V1 una vez conseguida la estabilidad, es decir una vez que se considere que ha enganchado a la señal de entrada V1?. ¿Por qué motivo?.
- 4 ¿Cuál es la función del diodo D1?.
- 5 ¿Qué forma la señal de control de entrada al VCO? ¿Por qué se necesita más de una señal?
- 6 ¿Qué elementos del circuito son los responsables de generar la frecuencia de oscilación en el VCO?
- 7 Considerando que el circuito se ha adaptado correctamente al funcionamiento de un PLL, ¿qué prueba podríamos realizar para comprobarlo? (Tome como referencia la fase de la señal de entrada)

Ejercicio Propuesto (Esquema PLL práctico)

- 1 Suponiendo que existe un desfase de $\pi/4$ entre la salida del VCO y la señal de entrada, la cual tiene una frecuencia de 1 kHz. ¿Qué frecuencias debe eliminar el filtro que tiene incorporado el PLL?. Explique por qué.
- 2 ¿Qué componente continua obtendríamos en la salida del detector si en ese instante tuvieramos un desfase de $\pi/2$ en la señal de salida del VCO respecto de la señal de entrada?. ¿Qué significaría dicha respuesta?.
- 3 Suponga que a la mitad del tiempo durante el que estoy haciendo el muestreo introduzco un salto de π radianes en mi señal de entrada, con las siguientes características en mi PLL: un filtro de lazo **RC** con un coeficiente de amortiguamiento $\xi = \sqrt{2}/2$, y una pulsación propia de $\omega_n = 180$. Pero, a partir de estos valores el PLL no consigue engancharse. Así que se plantea hacer modificaciones:
 - ¿Con los valores de coeficiente de amortiguamiento $\xi = 2$ y pulsación $\omega_n = 220$, si empleamos un filtro **RC**, podríamos conseguir el enganche?. (Considere que la cantidad de muestras que estoy utilizando es de $N = 3000$).
 - ¿Qué solución alternativa nos permitiría conseguir el deseado enganche, respetando los valores iniciales dados al coeficiente de amortiguamiento ξ y a la pulsación propia ω_n ?. ¿Existiría alguna desventaja a destacar para esta solución?

Ejercicio Propuesto (Esquema PLL práctico)

Partiendo del PLL práctico y suponiendo que la fuente V1 es un tono de 9,667 KHz, conteste a las siguientes cuestiones:

- 1 Calcule la frecuencia que debemos eliminar después de pasar por el detector, y el valor por el que será atenuada dicha frecuencia tras pasar por el filtro.
- 2 Suponiendo que la constante de lazo del PLL vale 1 y sustituyendo el filtro RC por un lead-lag activo de pulsación propia $\omega_n = 64$ y coeficiente de amortiguamiento $\xi = 5$:
 - Dibuje los elementos que componen el nuevo filtro y obtenga la función de transferencia del PLL.
 - Si el condensador que forma parte del nuevo filtro vale 1 nF, calcule el valor que toman el resto de elementos del filtro.
 - Calcule la señal de error que generaría el PLL ante una variación del tipo rampa en la frecuencia de la señal recibida, interpretando lo que se obtendría en el caso de que dejásemos funcionar al PLL durante un tiempo lo suficientemente grande como para considerarlo infinito.
- 3 Determine sobre el circuito del PLL qué elementos componen el VCO y diga cuál de esos elementos se considera clave para generar variaciones en la frecuencia de salida del VCO en función de la tensión de entrada introducida al VCO.

Ejercicio Propuesto (Esquema PLL práctico)

Partiendo del esquema del PLL práctico, conteste a las siguientes cuestiones:

- 1 Modifique el circuito para convertirlo en un modulador de FM.
- 2 Si el generador de frecuencia que hace de fuente transmisora fuera un generador de frecuencia variable según una rampa:
 - ¿Qué efectos son previsibles que sucedan?
 - ¿Habría que hacer alguna modificación en el circuito? (En caso afirmativo cuál sería y hacer una demostración matemática).
- 3 ¿Qué elementos serían necesarios añadir para convertir nuestro circuito en un demodulador ASK? (Añada los elementos como bloques).
- 4 Explique brevemente la función del diodo varactor, diciendo qué lo está controlando.

Ejercicio Propuesto

Esquema PLL (II)

- Localice en el circuito y explique brevemente la función del limitador y la necesidad de un filtro paso banda.
- Transforme el bloque de Laplace situado en la figura en elementos discretos. Elimine los elementos que sean necesarios para convertir el circuito de la figura en un modulador de FM, indicando los bloques básicos de que consta.
- Si el generador de frecuencia que hace de fuente transmisora fuera un generador de frecuencia del tipo rampa,
 - ¿Qué efectos son previsible que sucedan?
 - ¿Habría que hacer alguna consideración para conseguir un enganche cercano a lo perfecto? (haga demostración matemática)

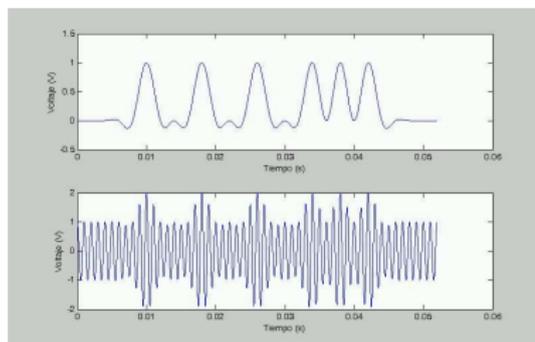


Figura: Señales en el PLL.

Ejercicio Propuesto

Esquema PLL (III)

- Si disponemos de una señal de información como la representada en la figura de la transparencia anterior, y se obtiene una modulación tal y como se muestra en la misma figura pero en la parte inferior.
- ¿Cómo utilizaría el esquema del PLL para recuperar la señal de información representada en la transparencia anterior, si se recibe la señal modulada previamente citada? (conteste en forma de diagrama de bloques)

Características de los PLLs

Margen de enganche

- El **margen de enganche** es aquel en el que si hay un salto, el PLL puede volver a engancharse.
- 1 f_0 es la frecuencia del VCO en la que se produce un salto a la frecuencia de entrada f_i . El salto es de valor $\Delta f = f_0 - f_i$.
- 2 El salto ocasiona una tensión de control V_0 en el VCO de valor $\Delta = K_v V_0$, donde K_v (Hz/V) es la constante del VCO.
- 3 En el detector de fase se tiene $V_d = A_d \theta_e$, con A_d (V/rad).
- 4 Para el caso en que el filtro no influye se tiene que $V_D = V_0$, por lo que $\Delta f = K_v A_d \theta_e$.
- 5 Es normal suponer que el PLL puede enganchar desviaciones de fase de valor máximo $\pm\pi/2$ ($|\theta_e| = \frac{\pi}{2}$). De esta forma ($\Delta f = K_v A_d \pi$ (Hz/V · V/rad · rad = Hz) (se supone una desviación total de π). Esta es la **máxima excursión de frecuencia que puede enganchar el PLL**.

Definición y características

- El margen de seguimiento hace referencia a que el PLL sigue las variaciones pequeñas en la señal de entrada una vez enganchada.
- En teoría el margen de seguimiento es infinito, pero en la práctica el VCO no puede seguir cualquier frecuencia de oscilación, por dos razones:
 - El varicap tiene un rango limitado de variación.
 - El oscilador pasado un límite se hace estable y ya no oscila.

Modulación y demodulación FM

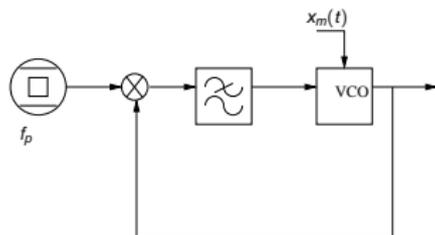


Figura: Modulador de FM

- El VCO oscila a una frecuencia muy precisa f_p .
- La señal moduladora se mete como tensión de control del VCO.
- La frecuencia del VCO cambia proporcionalmente al mensaje.

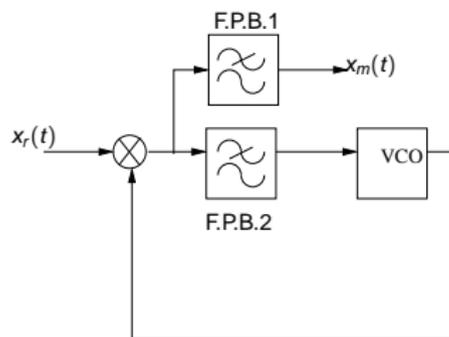


Figura: Demodulador de FM

- Elimina el armónico de frecuencia doble del detector de fase.
- A la salida del detector de fase se tiene una señal de control que varía según los cambios de la frecuencia de la señal de entrada.
- Este demodulador **ha sustituido en los receptores modernos a los discriminadores.**

Demodulación coherente de amplitud y síntesis de frecuencia

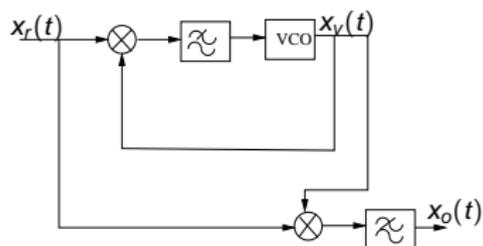


Figura: Demodulador DBL

Se obtiene **una señal $x_v(t)$ totalmente coherente** en fase y frecuencia con la señal recibida $x_r(t)$.

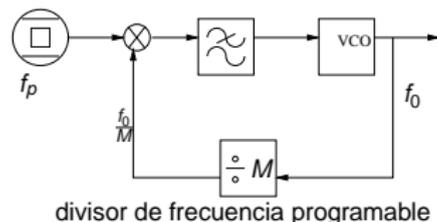


Figura: Sintetizador de frecuencia

El PLL se engancha a la frecuencia que hay en el detector de fase $f_p = \frac{f_0}{M}$, $f_0 = M f_p$. Se **sintetiza una frecuencia múltiplo de la señal del cristal.**

Ejercicio Propuesto

Aplicaciones PLLs (I)

- Encuentre la función de transferencia de fase del PLL sintetizador de frecuencia de la figura de la izquierda ($H_{PLL}(s)$). Asimismo, obtenga la función de error de fase del mismo PLL ($H_e(s)$), definida como la relación entre el error de fase y la fase de la señal de entrada. Asuma que el PLL se encuentra enganchado en frecuencia.
- El PLL anterior se utiliza como modulador de frecuencia (FM) al introducir la señal moduladora v_m en el VCO de la forma representada en la figura de la derecha. Obtenga la fase de la señal de salida en función de la fase de la señal de entrada $\Phi_r(s)$ y de la señal moduladora $V_m(s)$. Tenga en cuenta que el VCO se encuentra enganchado a la frecuencia de la señal de referencia, y por tanto $f_0(t) = f_c + K_m v_m(t) + K_v v_c(t)$ queda como $f_0(t) = K_m v_m(t) + K_v v_c(t)$ a efectos de análisis. Utilice la definición de ganancia $K = 2\pi K_v A_d$.
- Escriba la expresión de la frec. de salida $f_o(s)$ en función de la moduladora $V_m(s)$, la frec. de entrada $f_r(s)$, la función de error $H_e(s)$ y de transferencia de fase $H_{PLL}(s)$ del sintetizador de frecuencias. Teniendo en cuenta el comportamiento paso alto de $H_e(s)$ y el comportamiento paso bajo de $H_{PLL}(s)$, ¿Cómo ha de ser la frec. de la señal portadora $v_m(t)$ en relación a la frec. de la señal de entrada f_r para que la frec. de salida del PLL se comporte como FM?

Ejercicio Propuesto

Aplicaciones PLLs (II)

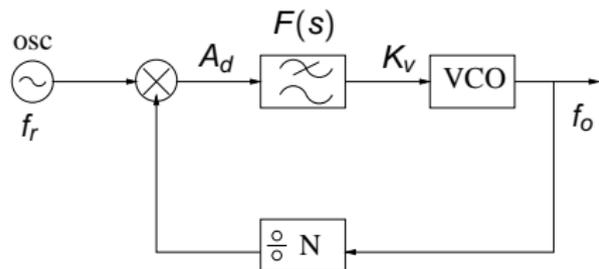


Figura: PLL sintetizador de frecuencia.

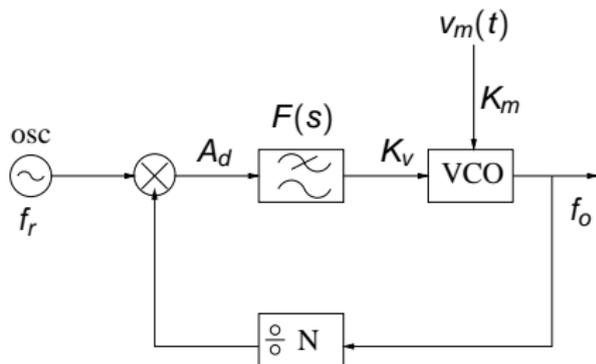


Figura: Modulador de FM con PLL.

Ejercicio Propuesto

Análisis PLL (I)

- Encuentre la función de transferencia $F(s)$ de los filtros de lazo de la figura de la izquierda y de la derecha. Por otra parte, calcule la función de transferencia de fase de los PLLs resultantes.
- Indique el orden y el tipo para cada uno de los PLLs con los filtros de lazo anteriores. Asimismo, obtenga la expresión del coeficiente de amortiguamiento ξ y de la pulsación propia ω_n en función de los componentes de los filtros y los parámetros del PLL, siempre y cuando sea posible.
- Calcule los errores de fase resultantes a la salida de los PLLs ante un salto de fase en la señal de entrada, un salto de frecuencia y una rampa en frecuencia.
- Represente como señales de entrada de un PLL de orden 2 y tipo 2, un escalón de fase, un salto en frecuencia y una rampa en frecuencia. Represente los diagramas de Lissajous resultante para cada una de las señales de entrada anteriores. Asimismo, muestre de la señal de error de fase entre la entrada y la salida, suponiendo que el PLL se encuentra enganchado inicialmente y un coeficiente de amortiguamiento ξ de tipo subamortiguado.

Ejercicio Propuesto

Análisis PLL (II)

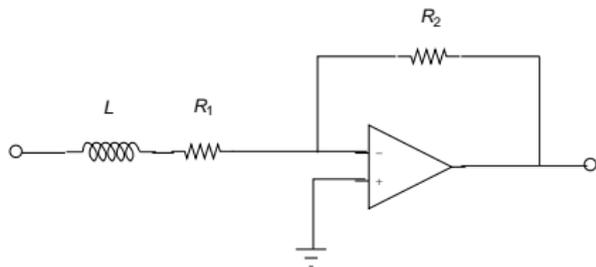


Figura: Primer filtro de lazo.

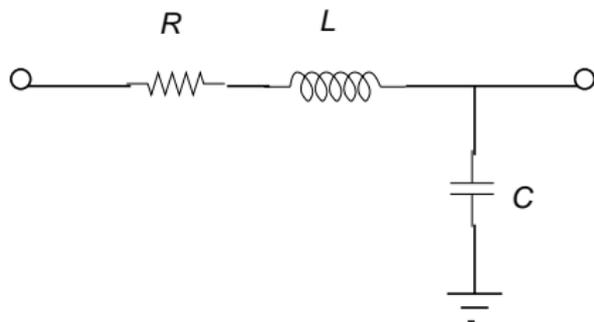


Figura: Segundo filtro de lazo.

- Calcule el margen de enganche de un PLL enganchado inicialmente a un tono de 1,6 MHz con filtro de lazo $F(s) = \frac{1+0,04s}{0,08s}$, constante del VCO 50 KHz/V, constante del detector de fase $A_d = 0,08$ V/rad.
- En el PLL del apartado anterior se aumenta lentamente la frecuencia, observándose que éste sigue enganchado. ¿Qué sucede si ésta se hace crecer de forma indefinida?, ¿a qué se debe ese comportamiento?