COORDENADAS CARTESIANAS Y POLARES.

(***Topografía básica para ingenieros***. García A., Rosique M., Segado F. Universidad de Murcia, 1994. ISBN 84-7684-568-5)

1.- INTRODUCCION.

Los resultados de los trabajos topográficos se van a plasmar, en el caso más general, en un plano, en el que se representan todos los detalles planimétricos y altimétricos que han sido objeto del levantamiento topográfico. El plano irá referido a un sistema de ejes cartesianos, siguiendo el eje YY la dirección de la meridiana (dirección Norte-Sur) y el eje XX la dirección perpendicular a la meridiana (dirección Este-Oeste). Este es el caso habitual, aunque, en ocasiones, se prefiere orientar los ejes cartesianos de manera distinta. La dimensión Z, que corresponde a las alturas de los puntos con relación al plano horizontal de referencia, se suele representar mediante *curvas de nivel*.

Llamamos *transporte por coordenadas* a la operación consistente en trazar sobre el plano XY los distintos puntos del levantamiento. Para representar un punto del terreno de coordenadas X e Y conocidas, llevaremos a partir del origen de coordenadas las magnitudes X e Y, previamente reducidas a la escala del plano, en las dirección de los ejes XX e YY respectivamente. La intersección de las perpendiculares a los ejes levantadas por los puntos así obtenidos nos señala la proyección del punto del terreno. Las coordenadas X se denominan *abscisas* y las Y *ordenadas*.

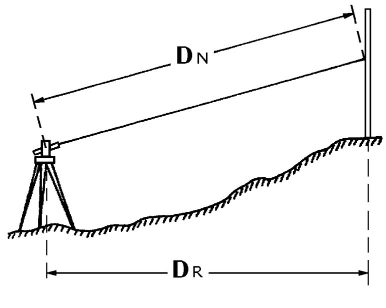
La proyección sobre el plano de un punto *P* del terreno también puede obtenerse a partir de sus coordenadas polares: distancia reducida entre *P* y el origen de coordenadas *O* y ángulo formado por la alineación *OP* con uno de los ejes de coordenadas. En un trabajo topográfico es habitual que se combinen estos dos métodos para la obtención del plano topográfico, como veremos más adelante.

2.- COORDENADAS POLARES.

Los instrumentos topográficos se limitan a la medida de coordenadas polares, ángulos y distancias, por lo que las coordenadas cartesianas deben deducirse por cálculo a partir de las polares. Con ayuda de estos instrumentos podemos determinar distancias reducidas y acimutes.

2.1.- Distancia natural y distancia reducida.

Distancia natural entre dos puntos es la longitud del tramo de recta que los une. En topografía no interesa medir distancias naturales, sino distancias reducidas. Llamamos *distancia reducida* entre dos puntos a la longitud del tramo de recta que une sus proyecciones sobre el plano horizontal XY. Se trata, por tanto, de una distancia *proyectada* sobre dicho plano XY.

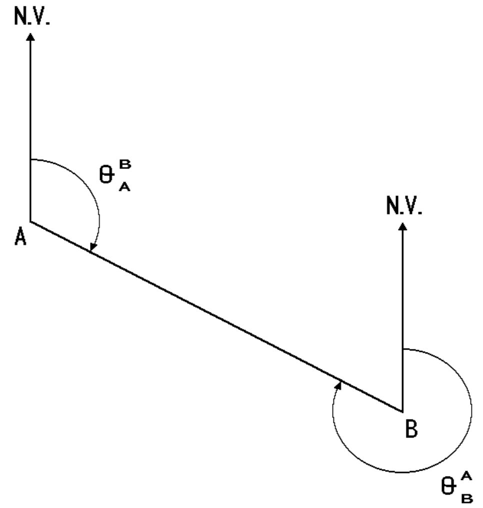


La distancia reducida entre dos puntos será menor, o como mucho igual, que su distancia natural. Si tenemos dos puntos *A* y *B*, de coordenadas cartesianas X_A, Y_A, Z_A y X_B, Y_B, Z_B, respectivamente, las expresiones para el cálculo de la distancia entre ellos serán:

$$\text{distancia natural: } \quad D_N = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 + (Z_B - Z_A)^2}$$

$$\text{distancia reducida: } \quad D_R = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$$

2.2.- Concepto de acimut.

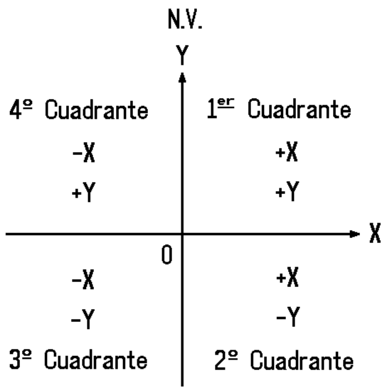


Llamamos *acimut* al ángulo formado por una alineación y la dirección de la meridiana, medido a partir del Norte y en el sentido de avance de las agujas del reloj. El eje YY de nuestro sistema de coordenadas cartesianas va a coincidir, como hemos visto, con la dirección de la meridiana, por lo que los acimutes estarán referidos a este eje o a una paralela al mismo.

Así, para determinar el acimut de una recta *AB* consideraremos una paralela al eje YY trazada por *A* y mediremos el ángulo formado por estas dos rectas, desde el Norte y en sentido horario. Denominaremos θ_A^B a este acimut. Si en vez de considerar el punto A como referencia consideramos el *B*, la paralela al eje YY se trazará por *B* y el acimut obtenido, θ_B^A, diferirá del θ_A^B en $\pm\ 200^g$ *(ó* $\pm\ 180^o$*)*, suponiendo que despreciamos la convergencia de meridianos. En la notación que empleamos el subíndice indica el punto de referencia y el superíndice el punto al cual se mide.

Los instrumentos topográficos no pueden medir directamente acimutes, a menos que hayan sido previamente *orientados*, sino ángulos horizontales referidos a una dirección arbitraria. Sin embargo, veremos como resulta posible transformar estas lecturas angulares en acimutes, lo que nos va a permitir trabajar con ángulos medidos siempre desde una misma referencia, con las ventajas que esto conlleva.

3.- COORDENADAS CARTESIANAS.



El sistema de coordenadas cartesianas consiste en dos ejes perpendiculares, el YY siguiendo la dirección de la meridiana y el XX siguiendo la dirección perpendicular a ella. Los dos ejes se cortan en un punto, que es el origen de coordenadas, al que se asignan coordenadas *X=0*, *Y=0*, u otras en función de las necesidades del trabajo.

Los ejes cartesianos dividen al plano XY en cuatro cuadrantes, que se numeran comenzando por el cuadrante superior derecho y en el sentido de las agujas del reloj. Los valores de la coordenada X son positivos a la derecha del origen, cuadrantes 1º y 2º, es decir al este del origen. Serán negativos en los cuadrantes 3º y 4º, al oeste. Los valores de la coordenada Y son positivos por encima del origen, cuadrantes 1º y 4º, al norte. Serán negativos en los cuadrantes 2º y 3º, al sur.

4.- TRANSFORMACION DE COORDENADAS.

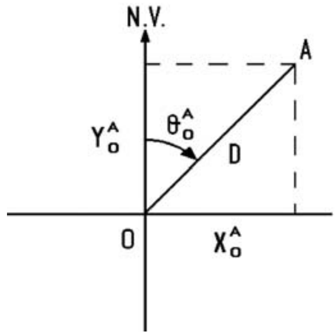
4.1.- Paso de coordenadas polares a coordenadas cartesianas.

Si se dispone de las coordenadas polares, distancia reducida y acimut, de un punto *A* con relación al origen de coordenadas *O*, las expresiones para el cálculo de coordenadas cartesianas se deducen fácilmente de la figura:

$$X_O^A = D \ \ sen\ \theta_O^A$$

$$Y_O^A = D \ \ cos\ \theta_O^A$$

siendo *D* la distancia reducida de *A* al origen y θ_O^A el acimut de la recta *OA*.



Estas expresiones son aplicables en todos los cuadrantes, pues nos dan en cada caso las coordenadas con su signo, por lo que inmediatamente se deduce la posición de *A* respecto al origen de coordenadas. Al ser coordenadas referidas al origen, se denominan *coordenadas absolutas*.

También podemos determinar las *coordenadas relativas* de un punto *B* con relación a otro punto *A*, que no es el origen de coordenadas. Para ello necesitamos conocer la distancia reducida *AB* y el acimut de la recta *AB*, es decir, el ángulo que forma esta recta con una paralela al eje YY trazada por *A*, medido desde el Norte y en la dirección de avance de las agujas de un reloj. Las expresiones son semejantes a las anteriores.

$$X_A^B = D_{AB} \ \ sen\ \theta_A^B$$

$$Y_A^B = D_{AB} \ \ cos\ \theta_A^B$$

La notación que empleamos para las coordenadas es similar a la que hemos visto para los acimutes. X_A^B es la distancia sobre el eje XX que separa los puntos *A* y *B*, pero medida desde *A* hacia *B*. X_B^A tendría el mismo valor absoluto, pero signo contrario. Como vimos, el subíndice indica el punto desde el que se mide y el superíndice el punto al que se mide.

4.2.- Paso de coordenadas cartesianas a coordenadas polares.

La distancia reducida de un punto al origen de coordenadas *O* se calcula:

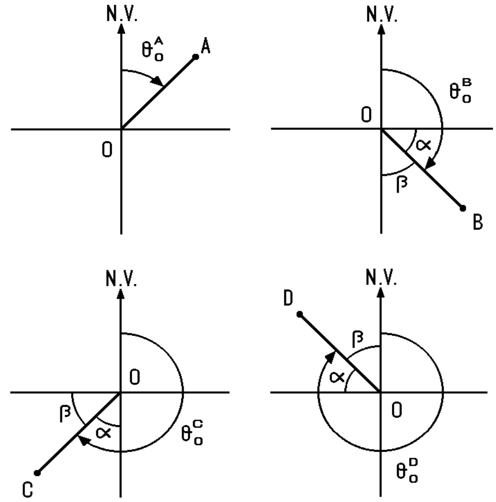
$$D = \sqrt{(X_O^A)^2 + (Y_O^A)^2}$$

siendo X_O^A, Y_O^A las coordenadas cartesianas absolutas de *A*. La distancia reducida entre dos puntos *A* y *B* será:

$$D_{AB} = \sqrt{(X_O^B - X_O^A)^2 + (Y_O^B - Y_O^A)^2}$$

como ya hemos visto.

Para el cálculo del acimut a partir de las coordenadas cartesianas pueden darse cuatro casos, según el punto se encuentre en uno u otro cuadrante:



- *1^er^ cuadrante*: El acimut $\theta_O{}^A$ de la alineación *OA* se determina:

$$\theta_O^A = \text{arco tg}\,\frac{|X_O^A|}{|Y_O^A|}$$

Todas las coordenadas que aparecen en estas expresiones las pondremos en valor absoluto.

- *2º cuadrante*: El acimut $\theta_O{}^B$ se puede calcular con cualquiera de las expresiones siguientes:

$$\theta_O^B = 100^g + \alpha = 100^g + \text{arco tg}\,\frac{|Y_O^B|}{|X_O^B|}$$

$$\theta_O^B = 200^g - \beta = 200^g - \text{arco tg}\,\frac{|X_O^B|}{|Y_O^B|}$$

- *3^er^ cuadrante*: El acimut $\theta_O{}^C$ se puede calcular con cualquiera de las expresiones siguientes:

$$\theta_O^C = 200^g + \alpha = 200^g + \text{arco tg}\,\frac{|X_O^C|}{|Y_O^C|}$$

$$\theta_O^C = 300^g - \beta = 300^g - \text{arco tg}\,\frac{|Y_O^C|}{|X_O^C|}$$

- *4º cuadrante*: El acimut $\theta_O{}^D$ se puede calcular con cualquiera de las expresiones siguientes:

$$\theta_O^D = 300^g + \alpha = 300^g + \text{arco tg}\,\frac{|Y_O^D|}{|X_O^D|}$$

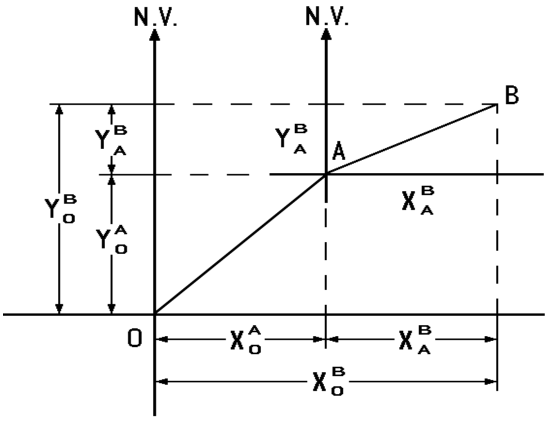
$$\theta_O^D = 400^g - \beta = 400^g - \text{arco tg}\,\frac{|X_O^D|}{|Y_O^D|}$$

Con frecuencia interesa determinar el acimut de la alineación formada por dos puntos *A* y *B* cualesquiera, en lugar del de la formada por un punto y el origen. Las expresiones son semejantes, sustituyendo en cada caso las coordenadas respecto al origen por la diferencia, en valor absoluto, de las coordenadas de los dos puntos. Se aplicarán unas expresiones u otras dependiendo de la posición del segundo punto respecto al primero, tal y como si éste fuese el origen de coordenadas. Por ejemplo, la expresión correspondiente al primer cuadrante quedaría:

$$\theta_A^B = arco\ tg\ \frac{|X_O^A - X_O^B|}{|Y_O^A - Y_O^B|}$$

Esta expresión se aplicará cuando el punto *B* se sitúe en el primer cuadrante respecto al *A*, es decir, cuando: $X_O^B > X_O^A$; $Y_O^B > Y_O^A$

5.- COORDENADAS ABSOLUTAS Y RELATIVAS.



Las coordenadas *absolutas* o *totales* son las que se refieren al origen de coordenadas, como hemos visto. Las representaremos como X_O^A, Y_O^A o simplemente X_A, Y_A.

Las coordenadas *relativas* o *parciales* se refieren a otro punto distinto del origen de coordenadas. Las características de los trabajos topográficos impiden medir directamente ángulos y distancias con relación al origen de coordenadas. Las mediciones se hacen con relación a distintos puntos materializados en el terreno, en los que se sitúan los instrumentos topográficos y que se denominan *estaciones*. Por tanto, las coordenadas que vamos a calcular serán coordenadas relativas, no absolutas.

Las coordenadas absolutas se deducen fácilmente de las relativas, realizando la operación conocida como *arrastre de coordenadas*. En el ejemplo de la figura, las coordenadas absolutas X_O^B, Y_O^B de un punto *B* se obtienen a partir de sus coordenadas relativas X_A^B, Y_A^B respecto a otro punto *A* y de las coordenadas absolutas X_O^A, Y_O^A de éste, por las expresiones:

$$X_O^B = X_O^A + X_A^B$$
$$Y_O^B = Y_O^A + Y_A^B$$

tal como se deduce de la figura.

Los puntos de un levantamiento se apoyan unos en otros y, por consiguiente, el arrastre de coordenadas se hará de una forma escalonada hasta determinar las coordenadas absolutas de todos los puntos de interés.