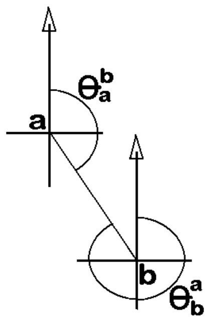
3.5.- Ejercicios.

3.5.1.-Para levantar un punto inaccesible en el frente de una explotación minera de interior se situaron y se levantaron dos puntos a y b próximos al frente. Se estacionó un teodolito en cada uno de ellos y se visó al otro punto conocido y al punto incógnita P. Calcula las coordenadas de P, conociendo las de los puntos de estación y las lecturas horizontales tomadas:

$$X_a = 110 \qquad Y_a = 115$$
$$X_b = 112 \qquad Y_b = 110$$

Estación	*Punto visado*	*Lectura horizontal*
a	***P***	$202{,}57^g$
	b	$288{,}40^g$
b	***a***	$46{,}32^g$
	P	$141{,}86^g$



Calculamos el acimut de la alineación *ab*. Para ello situamos ambos puntos en un croquis en función de sus coordenadas planas. En este caso, el acimut será:

$$\theta_a^b = 100^g + arc\ tg \frac{|Y_b - Y_a|}{|X_b - X_a|} = 175{,}776^g$$

$$\theta_b^a = \theta_a^b \pm 200^g = 375{,}776^g$$

Calculamos la distancia reducida D_{ab}:

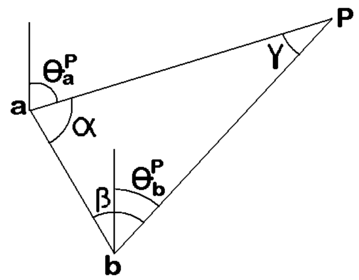
$$D_{ab} = \sqrt{(X_b - X_a)^2 + (Y_b - Y_a)^2} = 5{,}385m$$

Para resolver el triángulo *abP* comenzamos por calcular sus ángulos interiores a partir de las lecturas horizontales de la libreta de campo:

$$\alpha = L_a^b - L_a^P = 288{,}40^g - 202{,}57^g = 85{,}83^g$$

$$\beta = L_b^P - L_b^a = 141{,}86^g - 46{,}32^g = 95{,}54^g$$

$$\gamma = 200^g - \alpha - \beta = 18{,}63^g$$



De la figura se deduce:

$$\theta_a^P = \theta_a^b - \alpha = 89{,}946^g$$

$$\theta_b^P = \theta_b^a + \beta - 400^g = 71{,}316^g$$

Calculamos las distancias reducidas D_{aP} y D_{bP} aplicando el teorema del seno:

$$\frac{D_{aP}}{sen\ \beta} = \frac{D_{bP}}{sen\ \alpha} = \frac{D_{ab}}{sen\ \gamma} \qquad D_{aP} = 18{,}621m \qquad D_{bP} = 18{,}206m$$

Finalmente:

$$X_P = X_a + D_{aP}\ sen\ \theta_a^P = 128{,}389m$$

$$Y_P = Y_a + D_{aP}\ cos\ \theta_a^P = 117{,}929m$$

Comprobamos los resultados calculando también las coordenadas de *P* a partir del punto *b*:

$$X_P = X_b + D_{bP}\ sen\ \theta_b^P = 128{,}389m$$

$$Y_P = Y_b + D_{bP}\ cos\ \theta_b^P = 117{,}929m$$

3.5.2.- Se desea realizar un itinerario planimétrico encuadrado, recorriendo una galería que enlaza dos pozos A y D. A través de los pozos se determinaron mediante plomadas las coordenadas de los puntos interiores a y d y se transmitió la orientación, calculando los acimutes de las alineaciones de interior a-a' y d-d'. Calcula las coordenadas compensadas de las estaciones del itinerario, sabiendo que se empleó una estación total, orientándola en todas las estaciones.

$\theta_a^{a'} = 15{,}40^g$ $\qquad$ $\theta_d^{d'} = 205{,}50^g$

$X_a = 100 \quad Y_a = 100$ $\qquad$ $X_d = 212{,}33 \quad Y_d = 119{,}26$

Estación	Punto visado	L. acimutal	D. reducida
a	a'	$15{,}40^g$	
	b	87,32	45,30 m
b	a	287,32	
	c	91,56	30,85
c	b	291,56	
	d	89,15	37,76
d	c	289,15	
	d'	205,42	

Puesto que el instrumento se orientó en todas las estaciones del itinerario, las lecturas acimutales de la tabla anterior son acimutes. Por tanto, el error de cierre acimutal será:

$$e_{ca} = (\theta_d^{d'})_{TOP} - (\theta_d^{d'})_{TRIG} = 205{,}42^g - 205{,}50^g = -0{,}08^g$$

El acimut $\theta_d^{d'}$ topográfico, que se ha determinado mediante la última visual del itinerario, incorpora los errores acimutales cometidos a lo largo de éste. El acimut trigonométrico es el que nos sirve de referencia y procede de la orientación que se transmitió a la alineación d-d'. Puesto que el itinerario está formado por 4 estaciones:

$$f_c = \frac{e_{ca}}{4} = -0{,}02^g$$

Los acimutes se compensan teniendo en cuenta que los errores acimutales tienden a acumularse a medida que avanza el itinerario. Los acimutes compensados serán:

$$(\theta_a^b)_C = \theta_a^b - f_c = 87{,}32^g - (-0{,}02^g) = 87{,}34^g$$

$$(\theta_b^c)_C = \theta_b^c - 2\,f_c = 91{,}56^g - (-0{,}04^g) = 91{,}60^g$$

$$(\theta_c^d)_C = \theta_c^d - 3\,f_c = 89{,}15^g - (-0{,}06^g) = 89{,}21^g$$

$$(\theta_d^{d'})_C = \theta_d^{d'} - 4\,f_c = 205{,}42^g - (-0{,}08^g) = 205{,}50^g$$

El acimut $\theta_d^{d'}$, una vez compensado, debe coincidir con el trigonométrico. Las coordenadas (todavía sin compensar) se calculan con las distancias reducidas de la libreta de campo y los acimutes compensados. Las expresiones genéricas a emplear para calcular las coordenadas parciales de una estación *j* respecto a la anterior *i* son las siguientes:

$$X_i^j = D_{ij}\ sen\,(\theta_i^j)_C$$

$$Y_i^j = D_{ij}\ cos\,(\theta_i^j)_C$$

Con ellas obtenemos las correspondientes columnas de la tabla siguiente:

	Parciales sin compensar		Parciales compensadas		Totales	
	X	Y	X	Y	X	Y
a					*100,000*	*100,000*
	44,407	*8,949*	*44,455*	*8,895*		
b					*144,455*	*108,895*
	30,582	*4,059*	*30,615*	*4,034*		
c					*175,070*	*112,929*
	37,219	*6,369*	*37,259*	*6,331*		
d					*212,330*	*119,260*

$\Sigma X_i^j = 112{,}208 \qquad \Sigma Y_i^j = 19{,}377$

$\Sigma|X_i^j| = 112{,}208 \qquad \Sigma|Y_i^j| = 19{,}377$

Para calcular los errores de cierre en coordenadas se han obtenido los sumatorios de los valores de cada de las columnas anteriores; cada sumatorio debería coincidir con la coordenada parcial de la última estación respecto a la primera. El error de cierre en cada una de las coordenadas se obtiene comparando el valor del sumatorio con la diferencia entre las coordenadas conocidas de *a* y *d*:

$$e_{cx} = \Sigma X_i^j - (X_d - X_a) = 112{,}208 - (212{,}33 - 100{,}00) = -0{,}122$$

$$e_{cy} = \Sigma Y_i^j - (Y_d - Y_a) = 19{,}377 - (119{,}26 - 100{,}00) = 0{,}117$$

Para compensar las coordenadas calculamos los sumatorios de los valores absolutos de las dos columnas anteriores. Estos sumatorios coinciden con los anteriores puesto que todas las coordenadas son positivas. Para compensar cada coordenada parcial hacemos:

$$(X_i^j)_C = X_i^j - e_{cx}\,\frac{|X_i^j|}{\Sigma|X_i^j|}$$

Se actúa de igual modo con las coordenadas Y y se obtienen las coordenadas parciales X e Y compensadas de la tabla anterior. Finalmente, por arrastre de coordenadas, se obtienen las coordenadas totales.

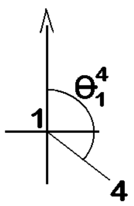
3.5.3.- Se ha realizado un itinerario encuadrado entre dos puntos 1 y 4, de coordenadas planas: $X_1 = 1.000 \quad Y_1 = 1.000$

$X_4 = 1.103,703 \quad Y_4 = 919,414$

En el punto 1 se disponía de una visual de acimut conocido. El instrumento topográfico se orientó en todas las estaciones. Calcula las coordenadas de los puntos de estación, con la siguiente libreta de campo:

Estación	*Punto visado*	*Acimut*	*D. reducida*
1	*2*	*$148,52^g$*	*38,20m*
2	*3*	*136,97*	*49,67*
3	*4*	*142,70*	*43,58*

Cuando sólo se dispone de una visual de acimut conocido en una de las estaciones extremas, el itinerario no puede compensarse con el método empleado en el ejercicio 3.5.2. En casos como el que nos ocupa calcularemos el acimut y la distancia reducida de la alineación que forman las estaciones extremas *1* y *4*, tanto mediante las coordenadas conocidas de ambos puntos (valores "trigonométricos") como empleando las coordenadas obtenidas al calcular el itinerario (valores "topográficos"). La diferencia entre los dos acimutes se resta a todos los acimutes del itinerario. Las distancias se corrigen dividiéndolas por la relación entre las dos distancias que hemos calculado.



Calculamos el acimut trigonométrico de la alineación *1-4*. Para ello situamos ambos puntos en un croquis en función de sus coordenadas planas:

$$(\theta_1^4)_{TRIG} = 100^g + arc\ tg \frac{|Y_4 - Y_1|}{|X_4 - X_1|} = 142,055^g$$

La distancia reducida entre ambas estaciones será:

$$(D_{14})_{TRIG} = \sqrt{(X_4 - X_1)^2 + (Y_4 - Y_1)^2} = 131,333m$$

Calculamos las coordenadas parciales de cada estación respecto a la anterior, empleando para ello los valores que figuran en la libreta de campo. Como en el ejercicio anterior, las expresiones genéricas son las siguientes:

$$X_i^j = D_{ij}\ sen\ (\theta_i^j)_C$$

$$Y_i^j = D_{ij}\ cos\ (\theta_i^j)_C$$

	X	Y
1		
	27,632	*-26,376*
2		
	41,527	*-27,250*
3		
	34,139	*-27,088*
4		

Las coordenadas parciales topográficas de 4 respecto a 1 se obtienen sumando las columnas de la tabla anterior:

$$X_1^4 = X_1^2 + X_2^3 + X_3^4 = 103{,}299m$$

$$Y_1^4 = Y_1^2 + Y_2^3 + Y_3^4 = -80{,}714m$$

Con ayuda de la figura anterior calculamos el acimut topográfico:

$$(\theta_1^4)_{TOP} = 100^g + arc\ tg\frac{|Y_1^4|}{|X_1^4|} = 142{,}225^g$$

La distancia reducida será:

$$(D_{14})_{TOP} = \sqrt{(X_1^4)^2 + (Y_1^4)^2} = 131{,}093m$$

Para corregir las coordenadas hacemos:

$$c = (\theta_1^4)_{TOP} - (\theta_1^4)_{TRIG} = 0{,}17^g$$

$$f = \frac{(D_{14})_{TOP}}{(D_{14})_{TRIG}} = 0{,}998$$

y corregimos acimutes y distancias:

$$(\theta_1^2)_C = \theta_1^2 - c = 148{,}52^g - 0{,}17^g = 148{,}350^g$$

$$(\theta_2^3)_C = \theta_2^3 - c = 136{,}97^g - 0{,}17^g = 136{,}800^g$$

$$(\theta_3^4)_C = \theta_3^4 - c = 142{,}70^g - 0{,}17^g = 142{,}530^g$$

$$(D_{12})_C = D_{12} / f = 38{,}20m / 0{,}998 = 38{,}270m$$

$$(D_{23})_C = D_{23} / f = 49{,}67m / 0{,}998 = 49{,}761m$$

$$(D_{34})_C = D_{34} / f = 43{,}58m / 0{,}998 = 43{,}660m$$

Con los valores corregidos de distancias y acimutes, y las expresiones anteriores, obtenemos las coordenadas parciales compensadas de la tabla siguiente. Las coordenadas totales se obtienen por arrastre de coordenadas:

	Parciales compensadas		Totales	
	X	Y	X	Y
1			*1.000,000*	*1.000,000*
	27,753	*-26,351*		
2			*1.027,753*	*973,649*
	41,676	*-27,189*		
3			*1.069,429*	*946,460*
	34,274	*-27,046*		
4			*1.103,703*	*919,414*

Terminamos comprobando que los valores de X_4 y de Y_4 obtenidos (*1.103,703* y *919,414*, respectivamente) coinciden con los valores conocidos de las coordenadas.

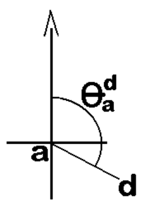
3.5.4.- Se estacionó una estación total en un punto a próximo al frente de una explotación minera. Se lanzó una visual a la estación d y, a continuación, se visaron dos puntos del frente P y P'. Calcula las coordenadas de los puntos visados, conocidas las de a y d y la libreta de campo.

$X_a = 100 \quad Y_a = 100 \quad Z_a = 100 \qquad X_d = 200 \quad Y_d = 50$

Estación	i	Punto visado	L. acimutal	D. reducida	t	m
a	1,50	d	314,28^g		–	
		P	207,42	27,550m	0,320	1,60
		P'	38,96	32,180	0,210	1,65

Nota: La determinación del desnivel se llevó por el piso de la labor.

La visual lanzada al punto *d*, en la que el operador se limita a anotar la lectura acimutal, nos servirá para calcular la corrección de orientación en la estación *a*:



$$(\theta_a^d)_{TRIG} = 100^g + arc\ tg \frac{|Y_d - Y_a|}{|X_d - X_a|} = 129,517^g$$

$$Co_a = \theta_a^d - L_a^d = 129,517^g - 314,28^g = -184,763^g$$

Calculamos los acimutes correspondientes a las visuales a los puntos *P* y *P'*:

$$\theta_a^P = Co_a + L_a^P = -184,763^g + 207,42^g = 22,657^g$$

$$\theta_a^{P'} = Co_a + L_a^{P'} = -184,763^g + 38,96^g + 400^g = 254,197^g$$

En el segundo caso, hemos sumado 400^g para evitar que el acimut sea negativo. Las coordenadas se calculan:

$$X_P = X_a + D_{aP}\ sen\ \theta_a^P = 100,000 + 27,550\ sen\ 22,657^g = 109,600m$$

$$Y_P = Y_a + D_{aP}\ cos\ \theta_a^P = 100,000 + 27,550\ cos\ 22,657^g = 125,823m$$

$$Z_P = Z_a + t + i - m = 100,00 + 0,320 + 1,50 - 1,60 = 100,22m$$

$$X_{P'} = X_a + D_{aP'}\ sen\ \theta_a^{P'} = 75,796m$$

$$Y_{P'} = Y_a + D_{aP'}\ cos\ \theta_a^{P'} = 78,794m$$

$$Z_{P'} = Z_a + t + i - m = 100,06m$$

3.5.5.- Calcular el desnivel entre los puntos a y b de un levantamiento de interior en los siguientes casos:

<u>Caso 1.</u> Los dos puntos están señalados en el piso de la labor.

$t = 0,20m \qquad i = 1,50m \qquad m = 1,70m$

Caso 2. ***a está señalados en el piso de la labor y b en el techo.***

t = 0,20m ***i = 1,50m*** ***m' = 1,10m***

Caso 3. ***a está señalados en el techo de la labor y b en el piso.***

t = 0,20m ***i' = 1,00m*** ***m = 1,70m***

Caso 4. ***Los dos puntos están señalados en el techo de la labor.***

t = 0,20m ***i ' = 1,00m*** ***m' = 1,10m***

Las expresiones a emplear figuran en el apartado 3.3.1 de los apuntes de la asignatura.

1) $Z_a^b = t + i - m = 0,20 + 1,50 - 1,70 = 0,00m$

2) $Z_a^b = t + i + m' = 0,20 + 1,50 + 1,10 = 2,80m$

3) $Z_a^b = t - i' - m = 0,20 - 1,00 - 1,70 = -2,50m$

4) $Z_a^b = t - i' + m' = 0,20 - 1,00 + 1,10 = 0,30m$

3.5.6.-Para determinar las coordenadas de la estación 2, se ha realizado un itinerario encuadrado de interior entre las estaciones 1 y 3, de coordenadas planas: 1 (100 ; 100), 3 (41,50 ; 134,50). En la estación 1 se disponía de una dirección de acimut conocido 1-1' que se empleó para orientar el instrumento topográfico. En la estación 3 se disponía también de una dirección 3-3' de acimut conocido: $\theta_3^{3'}$ = 260,40^g. Resuelve el itinerario con la siguiente libreta de campo, sabiendo que el instrumento topográfico se orientó en todas las estaciones:

Estación	*Punto visado*	*Acimut*	*Distancia media*
1	*2*	*345,82*	*25,372*
2	*3*	*327,15*	*43,368*
3	*3'*	*260,34*	

Se resuelve como el ejercicio 3.5.2. El error de cierre acimutal será:

$$e_{ca} = (\theta_3^{3'})_{TOP} - (\theta_3^{3'})_{TRIG} = 260,34^g - 260,60^g = -0,06^g$$

Puesto que el itinerario está formado por 3 estaciones:

$$f_c = \frac{e_{ca}}{3} = -0,02^g$$

Los acimutes compensados serán:

$$(\theta_1^2)_C = \theta_1^2 - f_c = 345,84^g$$

$$(\theta_2^3)_C = \theta_2^3 - 2\,f_c = 327,19^g$$

$$(\theta_3^{3'})_C = \theta_3^{3'} - 3\,f_c = 260,40^g$$

El acimut $\theta_3^{3'}$, una vez compensado, debe coincidir con el trigonométrico.

	Parciales sin compensar		Parciales compensadas		Totales	
	X	Y	X	Y	X	Y
1					*100,000*	*100,000*
	-19,074	*16,731*	*-19,059*	*16,637*		
2					*80,941*	*116,637*
	-39,472	*17,964*	*-39,441*	*17,863*		
3					*41,50*	*134,50*

$\Sigma X_i^j = -58,546 \qquad \Sigma Y_i^j = 34,695$

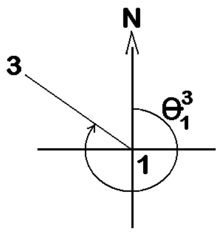
$\Sigma|X_i^j| = 58,546 \qquad \Sigma|Y_i^j| = 34,695$

$$e_{cx} = \Sigma X_i^j - (X_3 - X_1) = -0,046$$

$$e_{cy} = \Sigma Y_i^j - (Y_3 - Y_1) = 0,195$$

3.5.7.- Resuelve y compensa el itinerario anterior en el caso de que no se disponga del acimut de la dirección 3-3'.

Se resuelve como el ejercicio 3.5.3:



Acimut trigonométrico de la alineación *1-3*:

$$(\theta_1^3)_{TRIG} = 300^g + arc\ tg \frac{|Y_3 - Y_1|}{|X_3 - X_1|} = 333,922^g$$

Distancia reducida trigonométrica entre ambas estaciones:

$$(D_{13})_{TRIG} = \sqrt{(X_3 - X_1)^2 + (Y_3 - Y_1)^2} = 67,915m$$

Calculamos las coordenadas de cada estación respecto a la anterior, empleando para ello los valores que figuran en la libreta de campo.

	X	Y
1		
	-19,079	*16,725*
2		
	-39,484	*17,940*
3		

Las coordenadas parciales topográficas de 4 respecto a 1 se obtienen sumando las columnas de la tabla anterior:

$$X_1^3 = X_1^2 + X_2^3 = -58,563m$$

$$Y_1^3 = Y_1^2 + Y_2^3 = 34,665m$$

Con ayuda de la figura anterior calculamos el acimut topográfico:

$$(\theta_1^3)_{TOP} = 300^g + arc\ tg \frac{|Y_1^3|}{|X_1^3|} = 334,025^g$$

La distancia reducida topográfica será:

$$(D_{13})_{TOP} = \sqrt{(X_1^3)^2 + (Y_1^3)^2} = 68,054m$$

Para corregir las coordenadas hacemos:

$$c = (\theta_1^3)_{TOP} - (\theta_1^3)_{TRIG} = 0{,}103^g$$

$$f = \frac{(D_{13})_{TOP}}{(D_{13})_{TRIG}} = 1{,}00204$$

y corregimos acimutes y distancias:

$$(\theta_1^2)_C = \theta_1^2 - c = 345{,}717^g$$

$$(\theta_2^3)_C = \theta_2^3 - c = 327{,}047^g$$

$$(D_{12})_C = D_{12} / f = 25{,}320\,m$$

$$(D_{23})_C = D_{23} / f = 43{,}2795\,m$$

	Parciales compensadas		Totales	
	X	Y	X	Y
1			100,000	100,000
	-19,068	16,661		
2			80,932	116,661
	-39,432	17,839		
3			41,50	134,50