Universidad Politécnica de Cartagena

Dinámica del Sólido Rígido
Sistemas de fuerzas

Juan Francisco Sánchez Pérez

Universidad Politécnica de Cartagena

1 Sólido rígido

Sólido rígido

La definición de sólido rígido es la de un sistema de partículas que mantienen las distancias entre ellas, aún bajo la acción de fuerzas externas. Cuando una fuerza se aplica sobre el sistema, éstas se mueven al unísono.

Cuando un sólido rígido se mueve, puede trasladarse, rotar, o las dos cosas simultáneamente. Cuando se traslada, todas las partículas se mueven siguiendo trayectorias paralelas y con una única velocidad, y el movimiento puede ser descrito como cualquier otro sistema de partículas, aplicando el concepto de centro de masas como ya se vio en el capítulo anterior.

La característica diferencial del sólido rígido en cuanto al estudio de su movimiento es el hecho de que, al rotar respecto a un eje, todas las partículas llevan la misma velocidad angular y esto permite estudiar este movimiento con cierta facilidad.

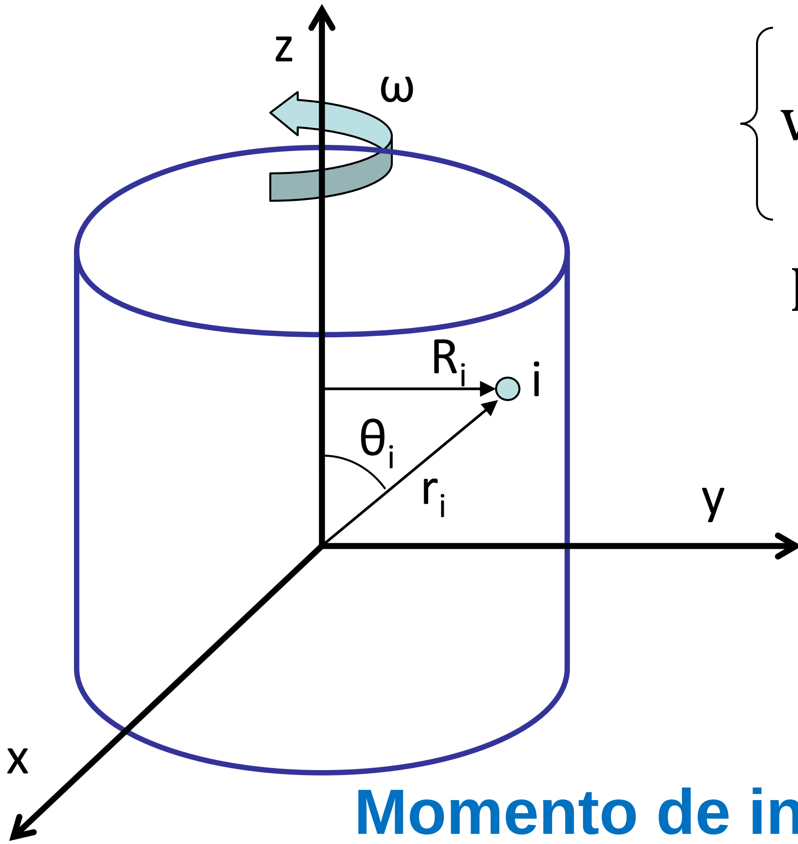
Sólido rígido

Como el sólido rígido no puede cambiar de forma, sólo puede trasladarse y girar. Sin embargo, los giros pueden llegar a ser realmente complejos.

Cualquier combinación de giros es equivalente a una rotación alrededor de un eje, aunque este eje, en general modificará su posición con el tiempo.

En las situaciones que estudiemos, supondremos que el giro se produce respecto a un eje fijo, situación mucho más fácil de describir.

Sólido rígido



$$L_{z,i} = m_i\left|\vec{r_i} \wedge \vec{v_i}\right| = m_i r_i v_i \operatorname{sen}\theta_i$$

$$\left\{ v_i = R_i\omega \qquad \operatorname{sen}\theta_i = \frac{R_i}{r_i} \right\}$$

$$L_{z,i} = m_i r_i v_i \operatorname{sen}\theta_i = m_i R_i^2 \omega$$

$$L_z = \sum_i L_{z,i} = \sum_i m_i R_i^2 \omega =$$

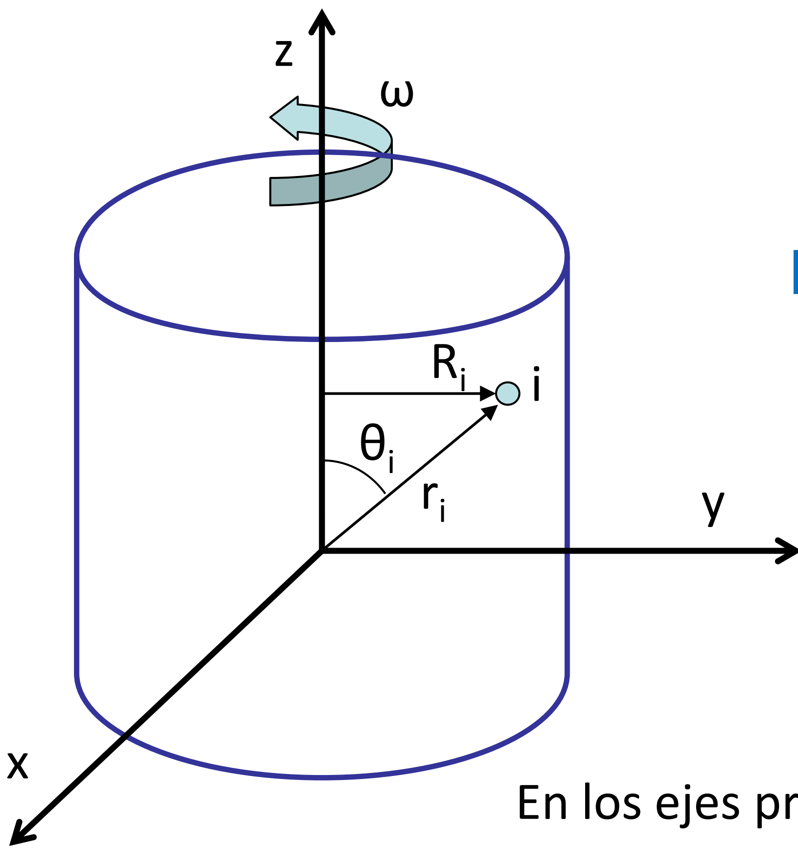
$$L_z = \omega \sum_i m_i R_i^2 = I\omega$$

Momento de inercia

$$\boxed{I = \sum_i m_i R_i^2}$$

$$\boxed{L_z = I\omega}$$

Sólido rígido



Radio de giro

$$R_g = \sqrt{\frac{I}{M}} \qquad M = \sum_i m_i$$

Ejes principales de inercia

Son ejes en los cuales cuando un sólido gira respecto de ellos, su momento angular, **L**, está dirigido a lo largo de ese eje. A los momentos de inercia, I, correspondientes a estos ejes se les denomina momentos principales de inercia.

En los ejes principales de inercia se cumple que:

$$\boxed{\vec{L} = I\vec{\omega}}$$

Cálculo de momentos de inercia.

Cuando tenemos un número discreto de partículas, para calcular el momento de inercia basta con hacer el sumatorio visto en el punto anterior; sin embargo, cuando tenemos un sólido continuo, el sumatorio se convierte en una integral de este tipo:

$$\mathrm{I} = \int \mathrm{r}^2 \mathrm{dm} = \int \mathrm{r}^2 \, \rho \mathrm{dV}$$

Siendo ρ una densidad volumétrica que suponemos constante (si el cuerpo tuviese dos o una sola dimensión, utilizaríamos la densidad superficial o lineal, respectivamente).

Cálculo de momentos de inercia.

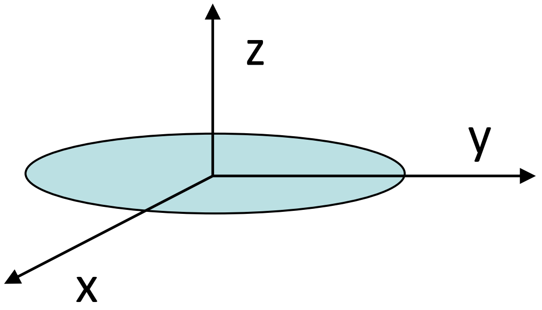
El cálculo de la integral se reduce a definir un elemento infinitesimal de volumen (o superficie o lineal) de tal manera que sólo tengamos una variable, normalmente r, que integraremos entre los límites del cuerpo que estudiamos.

Para el cálculo de la integral, debemos tener en cuenta que la simetría del problema nos permite realizar la integral sólo para un parte del cuerpo y sumar las otras contribuciones idénticas.

Asimismo, al tener carácter aditivo (por su propia definición), podemos calcular los momentos de inercia de distintas partes del cuerpo que resulten más fáciles para después sumarlas.

Teorema de las figuras planas

En una figura plana, o suficientemente delgada, la suma de momentos de inercia de dos ejes cualesquiera, perpendiculares entre sí, que se encuentren en el plano de la figura es igual al momento de inercia respecto de un eje perpendicular a la figura, siempre que los dos primeros ejes corten al eje perpendicular.



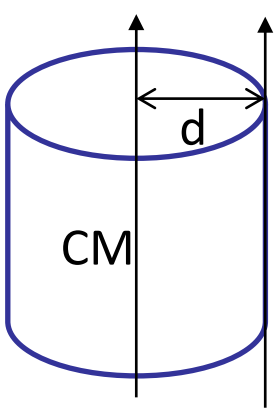
$$I_z = I_x + I_y$$

Teorema de Steiner

Este teorema relaciona momentos de inercia respecto a ejes paralelos de una manera muy sencilla.

Para un eje dado, el momento de inercia respecto a este eje es igual al momento de inercia respecto a un eje paralelo y que pase por el centro de masas, más el producto de la masa del sólido por la distancia al cuadrado entre los dos ejes.

Esto es, si el primer eje está a una distancia l del centro de masas, el momento de inercia del sólido con masa M, respecto a él será:



$$I = I_{cm} + Md^2$$

Radio de giro

El radio de giro representa la distancia a la cual se debe situar una partícula con la misma masa que el sólido para que ambos posean el mismo momento de inercia. El radio de giro viene dado por la siguiente expresión:

$$R_g = \sqrt{\frac{I}{M}}$$

Donde R_g, es el radio de giro, M la masa del sólido e I el momento de inercia respecto a un eje.

Ecuaciones de movimiento de rotación de un sólido rígido.

$$\sum \vec{\tau} = \mathrm{I}\vec{\alpha}$$

Esta expresión es equivalente a la segunda ley de Newton para el caso de rotaciones.

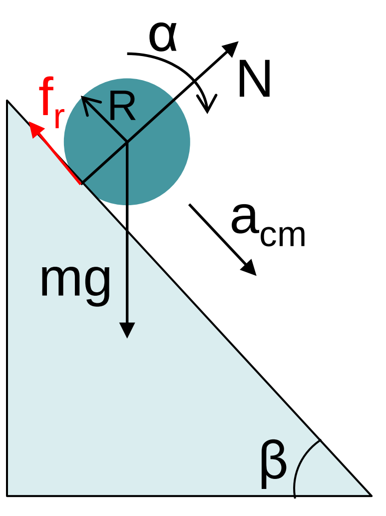
En función de esta expresión podemos desarrollar las ecuaciones de movimiento de la rotación, estableciendo una perfecta analogía con las ecuaciones de traslación.

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\mathrm{I}\vec{\omega})}{dt} = \mathrm{I}\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \mathrm{I}\alpha$$

Movimiento de rodar con y sin deslizamiento

Rueda sin deslizar: $f_r \leq \mu_{\text{estático}} N$ $\qquad a_{cm} = \alpha R$

Rueda y desliza: $f_r = \mu_{\text{dinámico}} N$ $\qquad a_{cm} \neq \alpha R$



Energía cinética de rotación

$$E_c = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i \omega^2 R_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i R_i^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

«La energía cinética de rotación alrededor de un eje es igual a la mitad del momento de inercia con respecto de ese eje por la velocidad angular al cuadrado.»

$$E_{c,R} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Cuando se tiene rotación y traslación la energía cinética viene dada por:

$$E_c = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

Ecuaciones de movimiento de rotación y traslación de un sólido rígido

Comparación entre movimiento traslacional y rotacional

Desplazamiento	Δx	Desplazamiento angular	$\Delta\theta$
Velocidad	$v = \frac{dx}{dt}$	Velocidad angular	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
Aceleración	$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	Aceleración angular	$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$
Ecuaciones para aceleración constante	$v = v_0 + at$ $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	Ecuaciones para aceleración angular constante	$\omega = \varpi_0 + \alpha t$ $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
Masa	m	Momento de inercia	I
Momento lineal	$\vec{p} = m\vec{v}$	Momento angular	$\vec{L} = I\vec{w}$
Fuerza	$\vec{F}$	Momento de una fuerza	$\vec{\tau} = Rx\vec{F}$
Potencia	$P = \vec{F}\vec{v}$	Potencia	$P = \vec{\tau}\vec{\omega}$
Segunda ley de Newton	$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$	Segunda ley de Newton	$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I\vec{\alpha}$
Energía cinética	$E_c = \frac{1}{2}mv^2$	*Energía cinética*	$E_c = \frac{1}{2}I\omega^2$

Bibliografía

SÁNCHEZ PÉREZ, JUAN FCO.; ALHAMA LÓPEZ, FRANCISCO Problemas de física para ingenieros (Tomo 2). Cartagena: Crai UPCT Ediciones, 2016. ISBN 978-84-16325-22-1

TIPLER, PAUL ALLEN Física para la ciencia y la tecnología. Mecánica, oscilaciones y ondas, termodinámica; Reverté, 2012. ISBN 97-88429144-29-1

BURBANO DE ERCILLA SANTAGO Problemas de Física. Madrid: Tebar. 2007. 815 p. ISBN 978-84-95447-27-2

FERNÁNDEZ, M.R. 1000 problemas de física general mecánica, electricidad, electromagnetismo, ondas, electrónica, relatividad, radiactividad, termodinámica: Bachillerato, LOGSE, Pruebas de acceso a la Universidad, Escuelas Técnicas, Facultades Universitarias. Everest, 2007. ISBN 97-88424176-03-7

SÁNCHEZ PÉREZ, JUAN FCO.; CONESA VALVERDE, MANUEL; CASTRO RODRÍGUEZ, ENRIQUE. Prácticas de física para ingenieros: Física I: errores, cinemática, dinámica, estática, fluidos, Cartagena: Universidad Politécnica de Cartagena, 2017. ISBN 97-88416325-36-8